*

Fullstendighetsresultater for noen modale predikatkalkyler foreslått av D. Føllesdal og for noen beslektede kalkyler

•

*

Morten Rognes

1973

*

INNHOLD

Innledning.....*1*
Del I.....*3*
§1 Språk og semantikk.....4
§2 Noen viktige hjelpesetninger.....8
§3 Gyldige formler i et modallogisk språk.....9
§4 Syntaks. 14
§5 Kanoniske modeller og ∂-kontraksjoner.....16
§6 Nec-underordnede og ¬Pos¬- underordnede teorier. 17
§7 Fullstendigheten til de kalkylene som har blitt introdusert.....19
§8 Fullstendigheten til en del relaterte systemer.....24
Del II.....*27*
§9 Individuerende funksjoner.....28
§10 Bevis for fullstendigheten til S* (S*+)-kalkylene.....31
§11 Systemer med kontingent identitet.....39
§12 Fullstendighetsbevis for systemene med kontingent identitet.....40
Referanser.....*44*
Referanser.....45

Innledning.

Utvider man en standardaksiomatisering av vanlig modal setningslogikk, la oss si systemet T, med et vanlig sett av aksiomer og slutningsregler for kvantifikasjons-teori og identitetsteori, kan man lett utlede formelen:

(1) (Ax)Nec((Ey)(y=x))

Denne formelen uttrykker at ethvert objekt x er slik at det er logisk nødvendig at det finnes noe som er identisk med det. Det kan derfor være nærliggende å hevde at (1) uttrykker at enhver ting eksisterer med nødvendighet. I Føllesdal [1], [2] er det foreslått en meget interessant semantikk for kausallogikk der (1) ikke er gyldig om operatoren "Nec" gis en kausal tolkning, dvs. om "Nec" leses "Det er kausalnødvendig at". Semantikken som fremsettes i disse arbeidene kan imidlertid godt oppfattes som en semantisk teori for modallogikk og man kan si at problemene omkring nødvendig eksistens unngås om man tolker kvantorene og modaloperatorene på Føllesdals måte.

I Del I av dette essay gir vi en rigorøs fremstilling av semantikken til Føllesdal utvidet med en teori om for bestemte beskrivelser, funksjonssymboler og det vi kaller singulære termer i snever betydning. Vi spesifiserer så et aksiomatisk system kalt "QK" hvor alle teoremene er gyldige om Føllesdals semantikk legges til grunn. Dernest vises det at dette systemet er komplett. Vi betrakter så en rekke systemer som er relatert til QK og viser at også disse systemene er komplette om semantikken modifiseres på passende måte. Inklusjonsforholdene mellom systemene er fremstilt på Figur 1 på side 28. En markant forskjell mellom systemene basert på Føllsdals semantikk og vanlige modalsystemer utvidet med kvantorer er at i de førstnevnte er ikke "¬Pos¬" lenger ekvivalent med "Nec".

I alle systemene i Del I er formelen:

(2) Nec(F) –> (x≠y -> Nec(x≠y))

gyldig forutsatt at variabeltegnene x og y forekommer fri i F. Dette kan virke rimelig så lenge man holder seg til modallogikk og kausallogikk, men gir man "Nec" en epistemisk eller doxastisk tolkning, dvs. leser "Nec" i (2) som enten
"a vet at" eller "a tror at", kan (2) virke urimelig. I Del II av dette essayet spesifiserer vi en semantikk der (2) ikke lenger er gyldig. Denne semantikken er basert på Hintikkas og Scott idéer om såkalte individuerende funksjoner. Den grunnleggende idé er klart fremlagt i Hintikka [1], [2], [3] og i Scott [1]. Den er her kombinert med det vesentlige i Føllesdals semantikk. De logikkene som er bestemt av den reviderte semantiske teorien blir akiomatisert og vist komplette. Disse logikkene er alle svakere enn de repektive motstykkene som blir undersøkt i Del I.

De individuerende funksjonene kan pålegges forskjellige krav. Vi betrakter et slikt krav som vi kaller for ikke-forgreningskravet. Oppgis dette kravet kan man vise at skjemaet:

(3) Nec(F) –> (x = y –> Nec(x = y))

der x forekommer fri i F ikke lenger er gyldig. Det samme gjelder skjemaet:

(4) x = y –>. Pos(F(x)) –> Pos(F(y))

Vi får på denne måten systemer der Leibniz lov ikke lenger holder siden (3) og (4) nettopp impliserer Leibniz lov (dvs. full substitutivitet til identitetsrelasjonen). Vi viser at de systemene som resulterer når ikke-forgreningskravet oppgis også er komplette.

Del I

§1 Språk og semantikk

De språkene vi betrakter her kan betraktes som vanlige første-ordensspråk med funksjonssymboler, konstanter og identitet utvidet med de to modaloperatorene "Nec" og "Pos", som leses henholdsvis som "Det er logisk nødvendig at"og "Det er logisk mulig at". I tillegg kommer en beskrivelsesoperator "(ix)" som leses "Det objektet x som er slik at", samt en spesiell kategori av singulære termer som vi kaller "singulære termer i snever forstand". Dette er ment å være singulære termer som ikke uten videre kan analyseres ved hjelp av beskrivelsesoperatoren. Som eksempler på slike termer kan nevnes "Morgenstjernen", "Aftenstjernen", "Walter Scott", "Nilen".

Mer formelt kan kan klassen av de språk vi vil betrakte, vi skal kalle dem "språk for modallogikk", spesifiseres på følgende måte:

(a) Det logiske vokabularet til et språk L for modallogikk inneholder:

(i) En tellbart uendelig mengde med variabeltegn. Vi lar disse være "x", "y", "z", "w", "x'",..... Vi tenker oss en alfabetisk ordning av variabeltegnene. Denne lar vi være som antydet.
(ii) Konnektivene "¬", "–>", "A", "Nec", "Pos" og "i", "=". Her er "¬" det vanlige negasjonstegnet; "–>" tegnet for materiell implikasjon. "A"representerer allkvantoren. "Nec", "Pos","i" representerer henholdsvis nødvendighetsoperatoren, mulighetsoperatoren og beskrivelsesoperatoren i språket. "=" er identitetspredikatet.
(iii) Parantestegnene "(" og ")" regnes med til det logiske vokabularet i L.

(b) Det ikke-logiske vokabularet til et språk L for modallogikk inneholder de følgende symboler:

(i) For hvert naturlig tall $n \geq 1$ en (muligens tom) mengde med n-ære predikatsymboler. Vi bruker "P", "Q" som syntaktiske variabler for denne kategorien av tegn.
(ii) For hvert naturlig tall $n \geq 1$ en mengde (muligens tom) med n-ære funksjonsymboler. Vi bruker "f", "g", etc. som syntaktiske variabler for funksjonsymboler.
(iii) En mengde (muligens tom) med konstanter. Vi bruker "a", "b", "c" for konstanter.
(iv) En mengde med singulære termer i snever forstand. "s", "l" vil bli brukt som syntaktiske variabler for denne typen uttrykk.

De velformede formlene og termene i et språk for modallogikk L er definert induktivt ved de følgende regler:

R1 Er F et n-ært predikatsymbol i L og t;i for i=1,...,n enten et variabeltegn, eller en singulær term eller en konstant i L er F(t;1,...,t;n) en velformet formel i L
R2 Er t enten et variabeltegn, en konstant eller en singulær term i snever forstand i L er t en velformet term i L
R3 Er f et n-ært funksjonsymbol i L ($n \geq 1$) og t;i for i=1,...,n velformede termer i L så er også f(t;1,...,t;n) en velformet term i L

R4 Er F en velformet formel i L er også (¬F), Nec(F) og Pos(F) velformede formler.
R5 Er x et variabeltegn i L og F en velformet formel i L er (Ax)F en velformet formel i L
R6 Er F, G velformede formler i L er også (F–>G) en velformet formel i L
R7 Er x et variabeltegn i L og F en velformet formel i L er (ix)F en velformet term i L

De vanlige setningslogiske konnektivene "&", "v" og "<–>" innføres ved definisjoner på vanlig måte. Det samme gjelder eksistenskvantoren "E". Uttrykket "(Ex)F" som leses "Det finnes et objekt x slik at F" brukes som forkortelse for "¬(Ax)¬F".

Vi betegner klassen av formler i L der L er et språk for modallogikk med "Fm(L)". Klassen av de lukkede formlene i L betegnes med "CFm(L)". Tilsvarende betegner "Tm(L)" klassen av velformede termer i L, "CTm(L)" betegner klassen av de lukkede termene i L. Vi definerer hva som menes med at et variabeltegn x forekommer fritt i en formel F (eller term t) på vanlig måte. Vi bruker "F;(x;1,....,x;n)(t;1,....,t;n)" for å betegne resultatet av å sette inn termene t;1,...,t;n simultant for variabeltegnene x;1,....,x;n i F. Det forutsettes da at de diverse forekomstene av x;1,....,x;n i F forekommer fri for henhodsvis t;1,...,t;n. Dette innebærer at variabeltegn som forekommer fri i t;i (i=1,...,n) ikke må bindes av kvantorer i F når de settes inn i F. "t;(x;1,....,x;n)(t;1,....,t;n)" for å betegne resultatet av å sette inn termene t;1,...,t;n simultant for variabeltegnene x;1,....,x;n i termen t.

Vi spesifiserer nå semantikken for denne typen språk. Vi definerer først hva som menes med en "modellstruktur":

Definisjon 1.1 Med en modellstruktur forstås et tuple <G,K,¶, f,*> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) K er en ikke-tom mengde.
(ii) G er et element i K, ie. GêK
(iii) ¶ er en relasjon over K ie. ¶ Inkl KXK
(iv) f er en funksjon som til hvert element HêK tilordner H en ikke-tom mengde. Man har altså at f(H) er en ikke-tom mengde for alle HêK.
(v) * er et objekt som ikke er med i UN/hêK/(f(H))

Er M = <G,K,¶,f,*> en modellstruktur skal vi bruke "D(M)" for å betegne UN/HêK/(f(H)), dvs. unionen av de diverse mengdene f(H) ettersom H gjennomløper mengden K. Vi kaller D(M) for domenet i modellstrukturen M. I en modellstruktur <G,K,¶,f,*> er det meningen at K skal representere de mulige verdene. G representerer den aktuelle verden. ¶ representerer alternativrelasjonen mellom de mulige verdenene i modellen. Har man <H;1,H;2>ê¶ innebærer dette at H;2 er mulig med hensyn på H;1. De enkelte objektene i f(H) der HêK representerer intuitivt sett de mulige individene som eksisterer i verdenen H. * er det meningen at skal representere et slags "null-objekt" som fungerer som referanse for termer under visse nærmere spesifiserte omstendigheter. Betydningen av denne komponenten vil bli klarere etterhvert.

Er L et språk for modallogikk og M en modellstruktur står "L(M)" for språket L utvidet med navn på alle elementene i D(M). Navnene skal være i en-entydig korrespondanse med individene i D(M). Vi bruker "i","j" som syntaktiske variabler for navn, og er aêD(M), står ¢(a) for navnet på objektet a. Er på den annen side i et navn i L(M) bruker vi "¢;-1(i)" for å betegne det objektet i D(M) som i er et navn på. Er M =<G,K,¶,f,*> en modellstruktur

og er HêK bruker vi "π(H)" for å betegne klassen av alle de navnene i L(M) som er navn på elementer i f(H). Vi setter med andre ord at π(H) = Mg(¢(a): aêf(H)).

Vi definerer nå hva som menes med en intepretasjon I assosiert med et modallogisk språk L og en modellstruktur M. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.2 La L være et språk for modallogikk og M = <G,K,¶,f,*> en modellstruktur. Med en intepretasjon assosiert med L og M forstås en funksjon I som oppfyller de følgende krav:

(i) Domenet til I er CXK der C er mengden av de ikke-logiske symbolene i L utvidet med alle navnene i L(M)

(ii) Er i et navn i L(M) og har man at a=¢;-1(i) har man at I(i,H')= a for alle H'êK

(iii) Er c en konstant i L skal det finnes et objekt aêf(G) slik at I(c, H)=a for alle HêK.

(iv) Er s en singulær term i snever forstand og HêK har man at I(s,H)êf(H)U{*}.

(v) Er P et n-ært predikatsymbol i L og HêK skal I(P,H) Inkl f(H)^n. (Med andre ord tilordner I ethvert par <P,H> der P er et n-ært predikat i L og H en mulig verden i M en n-ær relasjon over f(H))

(vi) Er f et n-ært fuksjonsymbol i L og HêK er I(f,H) en n-ær funksjon over f(H), med andre ord er I(f,H) en funksjon der domenet er f(H)^n og hvor verdiområdet er inkludert i f(H).

(vii) Er HêK er I(=,H) = Mg(<x,x>: xêf(H))

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som menes med en intepretasjon assosiert med L og en modellstruktur M.

Vi definere så hva som menes med at ∏ er en valusjon for L assosiert med intepretajonen I og modellstrukturen M. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.3 Anta L er et språk for modallogikk, M=<G,K,¶,f,*> en modellstruktur og I en intepretasjon assosiert med L og M. Med valuasjonsfunksjonen ∏ for L assosiert med I og M forstår vi da den minste partielle funksjonen som oppfyller de følgende krav:

(i) Domenet til ∏ er klassen av alle par <u,H> der u er et lukket velformet uttrykk i L(M) og H et element i K.

(ii) Er t en konstant, et navn eller en singulær term i snever forstand i L(M) har man at ∏(t,H) = I(t,H).

(iii) Anta t = f(t;1,...,t;n) der f er et n-ært funksjonsymbol i L og t;1,...,t;n lukkede termer i L(M). Da er

∏(f(t;1,...,t;n)) = I(F,H)(∏(t;1,H),...,∏(t;n,H))

forutsatt at ∏(t;i,H)êf(H) for i=1,...,n. Er ∏(t;i,H)ê(f(H)U{*}) for alle i=1,...,n, men ∏(t;j,H) =* for noe jê{1,...,n} er ∏(f(t;1,...,t;n))=*. Er ¬(∏(t;j,H)êf(H)U{*}) eller har man at ∏(t;j,H) er udefinert for noe jê{1,...,n} har man at ∏(f(t;1,...,t;n),H) er udefinert.

(iv) Anta t = (ix)F der F er en formel i L(M). Anta ∏(F;x[i], H) er definert for alle iêπ(H). Har man da at det finnes et og bare et navn jêπ(H) slik at ∏(F;x[j],H) =1 har man at ∏((ix)F,H) = ¢;-1(j) ellers er ∏((ix)F,H) = * Er det slik at ∏(F;x[i], H) er udefinert for noe iêπ(H) så er ∏((ix)F,H) udefinert.

(v) Anta F = P(t;1,....,t;n) der P er et n-ært predikatsymbol. Har man at ∏(t;j,H)ê(f(H)U{*}) for alle j=1,...,n så er ∏(P(t;1,...,t;n),H)=1 om <∏(t;1,H),...,∏(t;n,H)>êI(P,H), ellers er ∏(P(t;1,...,t;n),H)=0. Har man at ∏(t;j,H) ikke er med i f(H)U{*} eller at ∏(t;j,H) er udefinert for noe jê{1,...,n} er ∏(P(t;1,...,t;n),H) udefinert.

(vi) Anta F= (G;1–>G;2), HêK og at ∏(G;i,H)ê{0,1} for i=1,2. Da har man at ∏(G;1–>G;2,H)=1 hvis ∏(G;1,H)=0 eller ∏(G;2,H)=1, ellers er ∏(G;1–>G;2,H)=0. Er ∏(G;1,H) udefinert eller ∏(G;2,H) udefinert er ∏(G;1–>G;2,H) udefinert.

(vii) Anta F= ¬G og HêK. Anta ∏(G,H)ê{0,1}. Da har man ∏(¬G,H)=1 hvis ∏(G,H)=0, ellers er ∏(¬G,H)=0. Er ∏(G,H) udefinert er ∏(¬G,H) udefinert.

(viii) Anta F= (Ax)G og at HêK. Har man at ∏(F;x[i], H) er definert for alle iêπ(H) er ∏((Ax)F,H)= 1 hvis ∏(F;x[i], H)=1 for alle iêπ(H) ellers er ∏((Ax)F,H)= 0. Har man at ∏(F;x[i], H) er udefinert for et eller annet iêπ(H) har man at ∏((Ax)F,H) er udefinert.

(ix) Anta F = Nec(G) og HêK. Er ∏(G,H) definert har man at ∏(Nec(G),H)=1 hvis ∏(G,H')=1 for alle H' der <H,H'>ê¶, ellers er ∏(Nec(G),H)=0. Er ∏(G,H) udefinert er ∏(Nec(G),H) udefinert.

(x) Anta F = Pos(G) og HêK. Er ∏(G,H) definert har man at ∏(Pos(G),H)=1 hvis ∏(G,H')=1 for en eller annen H' der <H,H'>ê¶, ellers er ∏(Pos(G),H)=0. Er ∏(G,H) udefinert er ∏(Pos(G),H) udefinert.

Dette avslutter definisjonen av hva som menes med valuasjonsfunksjonen ∏ for L assosiert med I og M.

La L være et språk for modallogikk, M en modellstruktur, I en intepretasjon assosiert med L og M og ∏ valuasjonsfunksjonen for L assosiert med I og M. Vi kaller da triplet <M,I,∏> for en modell for L. Vi lar "R", "B", "C" for vilkårlige modeller for L i denne forstand.

La R være en modell for L. Da er R = <M,I,∏>, der M = <G,K,¶,f,*> er en modellstruktur, og I en intepretasjon assosiert med L og M. Vi lar i så fall "G(R)" betegne G, "K(R)" betegne K, "¶(R)" betegne ¶, "f(R)" betegne f, "*(R)" betegne *. "D(R)" betegner domenet i modellen dvs. UN/HêK/(f(H)). Vi vil også la "∏(R)" betegne valuasjonsfunksjonen i modellen R.

Vi skriver også av og til "L(R)" istedenfor "L(M)". L(R) er da språket L utvidet med navn på alle elementene i domenet til R. Vi vil også skrive "R;H(F)=1" og "R;H(F)=0" istedenfor henholdsvis "∏(F,H)=1" og "∏(F,H)=0" når ∏ er valuasjonsfunksjonen i modellen R. Vi skriver også "R;H(t)" eller "R(t,H)" istedenfor "∏(t,H)".

Anta R er en modell for L, FêFm(L). La x;1,...,x;n være de fri variablene i F. Med en R-instans av F forstår vi en formel av typen F;(x;1,...,x;n)(i;1,...,i;n) der i;1,...,i;n er navn i L(R) som er navn på elementer i f(R)(G(R)), ie som er elementer i π(G(R)). Vi sier at F er gyldig i R hvis og bare hvis enhver R-instans av F' av F er slik at R(F,G(R))=1. En formel F er gyldig i L hvis og bare hvis den er gyldig i enhver modell for L.

En modell R for L kalles henholdsvis seriell, refleksiv eller transitiv alt ettersom alternativrelasjonen ¶(R) i modellen er seriell, refleksiv eller transitiv. Er R en modell for L kaller vi ¶(R) for seriell hvis og bare hvis man har at (Ax)(xêK(R) –> (Ey)(yêK(R) & <x,y>ê¶(R)). ¶(R) kalles refleksiv hvis og bare hvis (Ax)(xêK(R) –> <x,x>ê¶(R)). Endelig kalles ¶(R) for transitiv hvis og bare hvis man har at (Ax)(Ay)(Az)(<x,y>ê¶(R) & <y,z>ê¶(R) –> <x,z>ê¶(R)).

Er R en modell for L og c en konstant i L ser man at R(c,H) = R(c,H) for alle HêK(R) og at (AH)(HêK(R) –> R(c,H)êf(R)(g(R))). g(R) kalles for den utpekte eller aktuelle verden i modellen M. f(R)(g(R)) skal vi kalle de faktisk eksisterende objektene i R. Man ser videre at om c er en konstant i L og R en modell for L så finnes det et og bare et objekt x i D(R) som er slik at R(c,H)=x for alle HêK(R). Dette objektet kaller vi for referansen til c i modellen R. Fra bemerkningene fremgår det derfor at referansen til en konstant i en modell R alltid er et faktisk eksisterende objekt i R.

§2 Noen viktige hjelpesetninger.

Vi formulerer i dette avsnittet en del hjelpesetninger som vi skal bruke i resonnementene i de neste paragrafene. Siden bevisene er temmelg enkle induksjonsbevis utelater vi dem.

Lemma 2.1 (a) La R være en modell for L og F en konstantfri, lukket formel i L(R). La i;1,...,i;n være navnene som forekommer i F. Er da HêK(R) og i;1,...,i;nêπ(H) gjelder at R(F,H)ê{0,1}. Er videre t en lukket konstantfri term i L(R), i;1,...,i;n de eneste navnene som opptrer i t, HêK(R) og i;1,...,i;nêπ(H) har man at R(t,H) er et element i f(R)(H)U{*(R)}.

(b) La R være en modell for L og F en lukket formel i L(R). La i;1,...,i;n være navnene som forekommer i F. Er da i;1,...,i;nêπ(G(R)) har man at R(F, G(R))ê{0,1}, med andre ord at R(F,G(R)) er definert. La t en lukket term i L(R) og anta i;1,...,i;n er de navnene som forekommer i t. Er da i;1,...,i;nêπ(G(R)) har man at R(t,H)êf(G(R))U{*(R)}.

(c) La R være en modell for L og HêK(R). Anta F er en lukket formel i L(R) og t en lukket term i L(R). Anta at dersom c er en konstant eller et navn som forekommer i F så har man at R(c,H)êf(R)(H). Anta videre at dersom c er en konstant eller et navn som forekommer i t så har man R(c,H)êf(R)(H). Da gjelder at R(F,H)ê{0,1} og R(t,H)ê(f(R)(H)U{*(R)}.

(d) Anta R er en modell for L og at HêK(R). Anta F er en lukket formel i L(R) og at R(F,H)ê{0,1}. Anta c;1,...,c;n er de konstantene og navnene som forekommer i F. Da har man R(c;i,H)êf(R)(H) for i=1,...,n. Er t en lukket term i L(R), har man R(t,H)êf(R)(H)U{*(R)}, og er c;1,....,c;n de navnene og konstantene som forekommer i t gjelder at R(c;i,H)êf(R)(H) om i=1,...,n.

I forbindelse med denne hjelpesetningen bemerkes det at (a) og (b) følger fra punktene (c) og (d). Disse bevises ved induksjon.

Lemma 2.2 La R være en modell for L, F en konstantfri og navnfri lukket formel i L(R). Da gjelder for alle HêK(R) at R(F,H)ê{0,1}. Er t en lukket, konstantfri og navnfri term i L(R) så er R(t,H)êf(R)(H)U{*(R)} for alle HêK(R).

Vi trenger også følgende lemma:

Lemma 2.3 La L være et språk for modallogikk og R en modell for L. Utvid L til L' ved å føye til en ny konstant c. Velg ut et objekt aê D(R). Utvid R til en modell R' for L' ved å stipulere at ∏(R')(c,H) = a for alle HêK(R). Ellers skal R' og R være fullstendig like. La i være navnet på a. La F være en formel i L'(R') der bare x forekommer fri. La t være en term i L'(R') der bare x forekommer fri. Anta HêK(R).

Holder disse forutsetningene har man at R'(F;x[c],H) = R'(F;x[i],H) om R(F;x[i],H) er definert. Ellers er både R(F;x[i],H) og R(F;x[c],H) udefinerte. Tilsvarende har man at

R'(t;x[c],H) = R'(t;x[i],H) om R(t;x[i],H) er definert. Ellers er både R(t;x[i],H) og R(t;x[c],H) udefinerte.

I det følgende betegner Const(L) klassen av alle konstanter i L. Vi trenger også de følgende to satser:

Lemma 2.4 La R være en modell for L. Anta Δ Inkl Const(L) og anta at dersom cê(Const(L) – Δ) så finnes det c'êΔ slik at R(c,H) = R(c',H) for en eller annen HêK(R). La F være en formel i L og la F' være resultatet av å erstatte enhver konstant c i F som er med i Const(L)–Δ med en fra Δ med samme referanse. Da har man for alle HêK(R) at R(F,H) og R(F',H) begge er udefinerte eller at
R(F,H) = R(F',H).

Lemma 2.5 La L være et st språk og Δ en mengde konstanter der ingen er med i L, ie. Δ Ω Const(L)=ø. La L;Δ være L utvidet med konstantene i Δ. La R være en modell for L;Δ der vi har:

(Ea)(aê*f*(R)(G(R)) & (AH)(HêK(R) –> R(e,H)=a)) for alle eêConst(L)

Anta videre at H;0êK(R) og at for alle cêΔ holder:

(Eb)(bê*f*(R)(H;0) & (AH)(HêK(R) –> R(c,H)=b))

La R' være restriksjonen av R til L. Da har man for alle F i L(R) at dersom HêK(R) og R'(F,H) er definert så er R(F,H)= R'(F,H)

§3 Gyldige formler i et modallogisk språk.

Anta nå at L er et språk for modallogikk. Vi skal se nærmere på spørsmålet om hvilke formler i L som er gyldige.

Anta R er en modell for L. I lys av den måten ∏(R) tilordner sannhetsverdier til de formlene som inneholder konnektivene "¬" og "–>" ser man lett at de følgende setningslogiske skjemaer er gyldige:

A1 F –> (G–>F)
A2 (¬G –> ¬F) –> (F–> G)
A3 (F–> (G –> E)) –> ((F–>G) –> (F–> E))

Videre skulle det heller ikke være vanskelig å se, i lys av valuasjonsreglen for allkvantoren i definisjonen av en modell R for L, at de følgende to skjemaer er gyldige:

A4 (Ax)F –> F;x [t] der det forutsettes at t enten er en variabel eller en konstant i L.
A5 (Ax)(F –> G) –> (F –> (Ax)G) forutsatt at x ikke forekommer fri i F.

Vi gjør oppmerksom på at det kan være hensiktsmessig å benytte Lemma 2.3 i beviset for at A5 er gyldig.

Det er videre lett å se at de følgende to skjemaer for identitet er gyldige:

A6 x = x
A7 x = y –> (F–> F') der F' er som F untatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x

De følgende aksiomene kaller vi for aksiomer for predikatsymboler:

A8 t;1 = t';1 &....& t;n = t';n –> (P(t;1,...,t;n) –> P(t';1,...,t';n))
A9 P(t;1,...,t;n) –> (Ex)(x = t;i) (i=1,...,n) forutsatt at P er et n-ært predikat i L og at x ikke forekommer fri i t;i

Det er lett å verifisere at A8 og A9 er gyldige. Gyldige er også de følgende to aksiomskjemaer for funksjonsymboler:

A10 t;1 = t';1 &....& t;n = t';n –> (f(t;1,...,t;n) = f(t';1,...,t';n))
A11 (Ex)(x=t;1)&....& (Ex)(x=t;n) <–> (Ex)(x= f(t;1,...,t;n)) forutsatt at x ikke forekommer fri i noen av termene t;1,...,t;n.

Vi kaller:

A12 (Ay)((Ax)(F <–> x=y) <–> y =(ix)F) forutsatt at y ikke forekommer fri i F

for aksiomskjemaet for beskrivelsesoperatoren. De enkelte instanser av dette skjema skal vi kalle for beskrivelsesaksiomer. Det er ikke spesielt vanskelig å verifisere at A12 er gyldig.

La oss så se på gyldige skjemaer som inneholder modaloperatorene Nec og Pos. Det skulle være lett å se at følgende skjema er gyldig:

A13 Nec(F) –> ¬Pos(¬F)

For anta R er en modell for L og anta (1) R(Nec(F'), G(R)) =1 i det man forutsetter at F' er en R-instans av F. Anta for reduktio ad absurdum at
(2) R(Pos(¬F'), G(R))=0. Fra (1) følger at R(F',H)=1 for alle H der <G(R),H>ê¶(R). Men da kan det umulig finnes en H' der <G(R),H'>ê¶(R) og hvor R(F',H')=0 eller hvor R(F',H') er udefinert. Dette innebærer at (2) er gal.

Man bør merke seg at det omvendte av A13: ¬Pos(¬F) –> Nec(F) ikke er noe gyldig skjema.

Det er også lett å se at det følgende skjema er gyldig:

A14 Nec(F–>G) –> (Nec(F) –> Nec(G))

Videre bemerkes at det følgende skjema er gyldig:

A15 (¬Pos¬(F–>G)) –> (¬Pos(¬F) –> ¬Pos(¬G)) forutsatt at enhver fri variabel som forkommer i F forekommer fri i G og at enhver konstant som forekommer i F forekommer i G.

A15 er imidlertid bare et spesialtilfelle av et mer generellt skjema som også er gyldig, nemlig:

A16 ¬Pos(¬(F;1&....&F;n & G.–> E)).–>
(¬Pos(¬F;1) &....&¬Pos(¬F;n) & Nec(G). –>. ¬Pos(¬E)
forutsatt enhver fri variabel som forekommer i en av F;1,...,F;n forekommer fri i G eller E og at enhver konstant som forekommer i en av F;1,...,F;n forekommer i enten G eller E.

Lemma 3.1 A16 er et gyldig skjema.

Bevis: La R være en vilkårlig modell for L. En R-instans av A16 vil være av samme form som A16, lukket og dessuten tilfredstille det forbehold som er nevnt i forbindelse med skjemaet. Vi har dessuten i lys av Lemma 2.1 at om F' er en R-instans av A16 har man at R(F',G(R))ê{0,1}. Anta derfor:

(1) R(¬Pos(¬(F;1&....&F;n & G.–> E)), G(R)) =1
(2) R(¬Pos(¬F;i), G(R)) =1 for i=1,...,n
(3) R(Nec(G), G(R)) =1

Anta dessuten for reduktio ad absurdum at:

(4) R(Pos(¬E), G(R)) = 1

Fra (4) følger at (5) R(¬E,H) =1 for noen HêK(R) der <G(R),H>ê¶. La c;1,....,c;m være de konstantene og navnene som forekommer i de diverse F;i'ene. Vi bruker k(Δ) for å betegne mengden av alle de konstantene og navnene som forekommer i formlene i Δ om Δ Inkl Fm(L). Da har vi at c;1,...c;mêk({G,E}). La d;1,...,d;p være de v disse konstantene som forekommer i G og la h;1,...,h;q være de av dem som forekommer i E. Vi har da:

{c;1,....,c;m} = {d;1,...,d;p,h;1,...,h;q}
d;1,....,d;pêk({G}) og h;1,...,h:q êk({E}).

Fra (5) og Lemma 2.1 må man ha at

R(h;j,H)ê*f*(R)(H) for j=1,...,q.

I motsatt fall ville ¬E være udefinert i H. Fra (3) har vi videre at:

(6) R(G,H)=1. Dette impliserer i lys av Lemma 2.1 at
R(d;j, H) ê*f*(R)(H) for j=1,...,p. I motsatt fall ville G være uten sannhetverdi i H. Dette er uforenelig med (3). Vi har derfor R(c;j,H)ê*f*(R)(H) for alle j=1,...,n. Siden {c;1,...,c;m} = k({F;1,...,F;n}) følger det at F;i enten må være sann eller gal i H. Fra (2) følger at følger det at R(F;i,H)=1 eller at R(F;i,H) er udefinert. Siden den siste muligheten er utelukket fordi R(F;i,H)ê{0,1} har man at (7) R(F;i,H)=1 for alle i=1,...,n. Siden alle formlene F;1...,F;n,G og E har sannhetsverdi i H har man i lys av (1) at

(8) R(F;1&...&F;n&G –>E, H) =1. Men fra (6), (7) og (8) følger R(E,H)=1 som strider mot (5). **Q.E.D.**

Vi bemerker også at det følgende skjema er gyldig:

A17 Nec(F) –> (¬Pos(¬G) <–> Nec(G)) forutsatt at enhver fri variabel i G forekommer fri i F og enhver konstant som forekommer i G også forekommer i F.

Lemma 3.2 A17 er gyldig.

Bevis: La R være en vilkårlig modell for L. Enhver R-instans av A17 vil ha nøyaktig samme form som A17, være en lukket formel i L(R) og dessuten tilfredstille forbeholdet. Den vil derfor være definert i G(R). Dessuten vil alle komponentsetningene være definert i G(R). La

Nec(F') –> (¬Pos(¬G') <–> Nec(G'))

være en R-instans av A17 og anta:

(1) R(Nec(F'),G(R)) =1
(2) R(¬Pos(¬G'), G(R)) =1 og dessuten for reduktio ad absurdum at
(3) R(Nec(G'), G(R)) = 0

Fra (3) følger at det finnes HêK(R) der (4) <G(R),H>ê¶ og hvor (5) R(G') enten er udefinert i H eller der man har R(G',H)=0. La c;1,...,c;m være de konstantene og navnene som forekommer i G'. Ved hjelp av (1) har vi at R(F',H)=1. Det følger da at (6) R(c;i,H)ê*f*(R)(H) for i=1,...,n ved hjelp av Lemma 2.1, siden alle konstantene i G' også skal forekomme i F'. Fra (2) følger at G' enten er sann i H elle udefinert i H. Siden c;1,...,c;m er alle konstantene og navnene som forekommer i G' har man i lys av (6) og Lemma 2.1 at G' må være sann i H. Men dette strider åpenbart mot (5). **Q.E.D.**

Man har også at følgende skjema er gyldig:

A18 Nec(F) –> (x;i ≠x;j –> Nec(x;i≠x;j)) der det forutsettes at x;1,...,x;n er distinkte fri variabler som forekommer i F og at i≠j.

Lemma 3.3 A18 er gyldig.

Bevis: Anta at R er en modell for L. En R-instans av A18 vil være av typen:
(1) Nec(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] –> (i;p≠i;q –> Nec(i;p≠i;q)) der i;1,...,i;n er navn i L(R). Anta:
(2) R(Nec(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) ,G(R)) =1 og
(3) R(i;p≠i;q, G(R)) =1. Anta dessuten for reduktio ad absurdum at
(4) R(Nec(i;p≠i;q), G(R)) = 0. Fra det siste følger:
(5) R(i;p≠i;q, H) er udefinert eller R(i;p≠i;q,H)=0 for en eller annen HêK(R) der <G(R),H>ê¶. Fra (2) følger at:
(6) R(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] , H) =1 og derfor i lys av Lemma 2.1 at
(7) R(i;p,H)ê*f*(R)(H)
(8) R(i;q,H)ê*f*(R)(H).
Fra (3) har man: (9) R(i;p,G(R))≠R(i;q,G(R)). Men R(i;p,H) = R(i;p,G(R)) og R(i;q,H) = R(i;q,G(R)), (Siden et navn har den samme referanse i enhver mulig verden). Fra dette og (9) har man:
R(i;p, H)≠R(i;q, H)
I lys av (7) og (8) og valuasjonsreglen for "=" impliserer dette R(i;p≠i;q, H)=T som strider mot påstand (5). **Q.E.D.**

Vi nevner ytterligere to aksiomskjemaer som er gyldige:

A19 x≠y –> ¬Pos(¬(x ≠ y))
A20 ¬Nec(F) –> ¬Nec(¬(Ax)(x=x))

Beviset for at disse formlene er gyldige overlates til leseren. Dette avslutter vår oversikt over formler som kan brukes som aksiomkjemaer om man ønsker å aksiomatisere mengden av de gyldige formler i et språk L for modallogikk.

Vi går nå over til slutningsreglne. Det er lett å se at de følgende to slutningsregler er gyldighetsbevarende:

R1 :– F & :– (F–>G) –> :– G
R2 :– F –> :– (Ax)F

Som man ser er R1 og R2 henholdsvis modus ponens og universell gene-ralisering. Den følgende regel er også gyldighetsbevarende:

R3 :– F –> :– Nec(F) forutsatt at F er en lukket og konstantfri formel.

Vi overlater igjen beviset for dette til leseren. I beviset benyttes Lemma 2.1 og Lemma 2.2.

Den følgende regel bevarer gyldighet:

R4 :– F;1&....&F;n –> G –> :– Nec(F;1)&....&Nec(F;n) –> Nec(G) forutsatt at enhver variabel som forekommer fri G også må forekomme fri i en eller flere av formlene F;1,...,F;n og at enhver konstant som forekommer i G er blandt de konstantene som forekommer i F;1,...,F;n,

Lemma 3.4 R4 bevarer gyldighet.

Bevis: La R være en modell for L og anta

(1) R(Nec(F;i), G(R)) = 1 for i=1,...,n og

(2) R(Nec(G), G(R)) =0

Fra (2) følger at det må finnes en HêK(R) slik at <G(R),H>ê¶ og der

(3) R(G,H)=0 eller R(G,H) er udefinert. Fra (1) følger

(4) R(F;1&....&F;n,H) =1. La c:1,....,c;m være konstantene og navnene som forekommer i F;1,...,F;n. Fra (4) og Lemma 2.1 følger følger at R(c;j,H)ê*f*(R)(H) for J=1,...,m. La R' være en modell som er nøyaktig som R men der vi har at H er utpekt verden istedenfor G(R). Vi bruker de samme navnene i R' og R. Man kan da vise, for enhver lukket formel FêFm(L'(R')), der L' er som L, men med konstant mengden begrenset til c;1,...,c;m, at det følgende holder:

(5) R'(F,H) = R(F,H)

Siden F;1&....&F;n –> G er gyldig følger at R(F;1&....&F;n–> G,H) =1. Herav har man i lys av (5) at

R(F;1&...&F;n,H)=1 –> R(G,H)=1

Sammen med (4) impliserer dette R(G,H)=1. Men dette strider mot (3). **Q.E.D.**

Vi bemerker også de følgende regler bevarer gyldighet:

R5 :– F –> :– ¬Pos(¬F)

R6 : – (F–>G) –> :– Pos(F) –> Pos(G) forutsatt at enhver variabel som forekommer fri i G også forekommer fri i F og enhver konstant som forekommer i G også forekommer i F.

Beviset for at disse er gyldighetsbevarende overlates til leseren som en øvelse.

Dette avslutter oversikten over gyldige formler og gyldighetsbevarende slutningsregler.

Vi bemerker at skjemaet:

(D) Nec(F) –> Pos(F)

er gyldige i alle serielle modeller. Videre at det følgende skjema:

(T) ¬Pos(¬F) –> F

er gyldig i alle refleksive modeller. Endelig er de følgende to skjemaer gyldige i alle transitive modeller:

(4*) Pos(Pos(F)) –> Pos(F)
(4) Nec(F) –> Nec(Nec(F))

§4 Syntaks.

La L være et språk for modallogikk. Med QK-aksiomene i L, Ax(QK,L), forstår vi alle instanser i L av aksiomskjemaene A1 – A20. Med QK4-aksiomene i L, Ax(QK4,L) forstås QK-aksiomene i L pluss alle instanser i L av skjemaene (4) og (4*). Med QD-aksiomene i L, Ax(QD,L) forstås Ax(QK,L) utvidet med alle instanser av akjemaet D. Med QK4D-aksiomene i L, Ax(QK4D,L), forstås Ax(QD,L)U AX(QK4,L). Med QT-aksiomene i L, Ax(QT,L), forstår vi mengden Ax(QK,L), utvidet med alle instanser av skjemaet T i L. Med QS4-aksiomene i L, Ax(QS4,L), forstår vi Ax(QT,L) U Ax(QK4,L).

I det følgende lar vi "S" stå for enten "QK", "QK4", "QD", "QK4D", "QT" eller "QS4". Vi definerer Th(S,L), S-teoremene i L som den minste mengden X Inkl Fm(L) der Ax(S,L) Inkl X og der X er lukket under slutningsreglene R1 – R6. Vi definerer ß(Δ,S,L) som den minste mengden X Inkl Fm(L) der Th(S,L)UΔ Inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering, dvs. under R1 og R2. Det forutsettes at Δ Inkl Fm(L). Med en S-teori i L med aksiomer Δ forstår vi en mengde ß(Δ,S,L) der Δ Inkl L. Er systemet S og språket L underforstått brukes "T", "T'" etc. for S-teorier og vi skriver
T :– F hvis og bare hvis F er et teorem i T, dvs. hvis og bare hvis det finnes en formelsekvens F;1,...,F;n av formler i L der F;i enten er et S-teorem i L, eller er med i Δ, aksiommengden til T, eller er sluttet fra en tidligere formel i sekvensen ved hjelp av modus ponens eller universell generalisering. Er T = ß(Δ,S,L) bruker vi T[F] for å betegne ß(ΔU{F},S,L).

De følgende teoremer er standardteoremer.

Teorem 4.1 (Deduksjonsteorem) La T være en S-teori i L. Da har man at
T :– (F–> G) hvis og bare hvis T[F] :– G forutsatt at F er en lukket formel i L

Beviset overlates til leseren. Man bør notere et de setningslogiske aksiomene o aksiomene for kvatorene er valgt ut slik at beviset for dette teoremet blir forholdsvis enkelt.

Teorem 4.2 (Konstantteorem). La T vær en S-teori i L der T = ß(Δ,S,L) og Δ Inkl Fm(L). La L' være L utvidet med nye konstanter og sett T'= ß(Δ,S,L'). Da har man at T :– F hvis og bare hvis T' :– F;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] forutsatt F er en formel i L og c;1,...,c;n er en sekvens av nye konstanter.

Beviset for Teorem 4.2 er i det vesentlige som beviset for "Theorem on Constans" i Shoenfield [1], side 33.

Teorem 4.3 (Reduksjonsteorem) Anta T = ß(Δ,S,L). Anta ∑ Inkl Fm(L). Da har man at Fêß(ΔU∑, S,L) hvis og bare hvis det finnes G;1,...,G;n, der G;i (i=1,...,n) er lukningen av en formel i ∑ slik at:
((G;1&....&G;n) –> F) ê ß(Δ,S,L)

Teorem 4.4 (Reduksjonsteorem for konsistens) Anta T = ß(Δ,S,L) og anta

ø≠∑ inkl Fm(L). Da har man at ß(ΔU∑, S,L) er inkonsistent hvis og bare hvis det finnes G;1,...,G;n, der G;i for i=1,...,n er lukningen av en formel i ∑ slik at

(¬G;1 v.... v ¬G;n)êß(Δ,S,L)

Korollar 4.5 Anta T = ß(Δ,S,L). Anta FêFm(L) og la F' være lukningen av F. Da har man at F êß(Δ,S,L) hvis og bare hvis ß(ΔU{¬F'},S,L) er inkonsistent.

Bevisene for Teorem 4.3, Teorem 4.4 og Teorem 4.5 er i det vesentlige som for de tilsvarende teoremer som er bevist i Shoenfield [1], Ch. 4, side 42 - 43.

Vi innfører spesielle aksiomer og spesielle konstanter som i Shoenfield [1], Ch 4, side 46 – 47. Er L et språk fo modallogikk defineres L;c som der. T;c er teorien hvis ikke-logiske aksiomer er dem i T pluss alle de spesielle aksiomene. Mer formelt er T = ß(Δ, S,L) så er T;c= (ΔUΔ;c, S, L;c) der Δ;c er mengden av de spesielle aksiomene i L;c. Vi forutsetter at Δ Inkl i Fm(L). Med e Henkin S-teori, T, i L menes en teori ß(Δ,S,L) som er slik at for enhver lukket formel (Ex)F i L finnes det en konstant e i L slik at ((Ex)F –> F;x[e])êß(Δ,S,L). Er T = ß(Δ,S,L) kaller vi T for komplett hvis og bare hvis man (i) har for enhver formel FêCFm(L) at Fêß(Δ,S,L) eller (¬F)êß(Δ,S,L) og (ii) har at ß(Δ,S,L) er konsistent.

Som i Shoenfield [1] beviser man de følgende to teoremer:

Teorem 4.6 La T være en S-teor i i L. Da er T;c en Henkin-teori i L;c og en konservativ utvidelse av T.

Teorem 4.7 (Lindenbaums teorem) Er T en S-teori i L så har T en enkel komplett utvidelse. Med andre ord har man at T=ß(Δ,S,L) så finnes en Δ' Inkl Fm(L) slik at ß(Δ,S,L) Inkl ß(Δ',S,L) der T' = ß(Δ',S,L) er komplett.

Med en QD-modell forstår vi en seriell modell, med en QK4-modell forstår vi en transitiv modell, med en QKD4-modell forstås en seriell og transitiv modell. Med en QT-modell forstår vi en refleksiv modell og med en QS4-modell fortås en refleksiv og transitiv modell.

På grunnlag av resultatene i §3 kan man utlede det følgende teorem:

Teorem 4.8 (Gyldighetsteorem) Anta T= ß(Δ,S,L). La R være en S-modell for L der vi har at F er gyldig i R om FêΔ. Anta Gêß(Δ,S,L). Da er G gyldig i R.

§5 Kanoniske modeller og ∂-kontraksjoner.

Er T en teori er L(T) språket til T. Med andre ord er T = ß(Δ,S,L) har man L(T)=L. Med den kanoniske ekvivalensrelasjonen over Const(L(T)) forstås relasjonen ≈;T definert slik:

<c;1,c;2>ê ≈;T <–> T :– c;1=c;2 der c;1 og c;2 er konstanter i L(T).

Er X en mengde, og R en ekvivalensrelasjon over X, brukes "[X/R]" for å betegne kvotientmengden til X med hensyn på R, mengden av alle R-ekvivalensklasser over X. Vi har derfor at [X/R] er en mengde med ikke-tomme, gjensidig eksklusive mengder som samlet uttømmer X.

Det skulle være klart at ≈;T, slik denne relasjonen er definert ovenfor, er en ekvivalensrelasjon. Vi lar nå ∂ være en utvalgsfunksjon over

C= [Const(L(T)/ ≈;T], dvs. en funksjon som til ethvert element xêC plukker ut et element fra x. Med T;∂ forstås teorien hvis språk er L(T), men med konstantmengde begrenset til ∂"[Const(L(T))/≈;T], og hvor de ikke-logiske aksiomene er de formlene FêFm(L(T;∂)) som er teoremer i T. Vi kaller T;∂ for ∂-kontraksjonen av T.

La F være en formel L(T) og ∂ som ovenfor. Med ∂(F) fortår vi resultatet av å erstatte enhver konstant c i F med ∂([c];T) der [c];T per definisjon er mengden Mg(c': <c',c>ê ≈;T).

Lemma 5.1 Er T en komplett Henkin S-teori i L, og T;∂ en ∂-kontraksjon av T, gjelder for alle FêFm(L(T))

T :– F <–> T;∂ :– ∂(F).

Bevis: Anta T :– F. La c;1,....,c;m være de konstantene som forekommer i F. Åpenbart har man T :– c;j = ∂([c;j];T) for j=1,...,m. Man har derfor at T :– ∂(F) ved hjelp av identitetsaksiomene. Da er ∂(F) et ikke-logisk aksiom i T;∂ og følgelig T;∂ :– ∂(F).

Kondisjonalen mot venstre i teoremet bevises ved induksjon på klassen av teoremer i T;∂. Er F et logisk aksiom i T;∂ er åpenbart F et logisk aksiom i T og i så fall har man T :– F. Er F et ikke-logisk aksiom i T;∂ er F (pr. definisjon av T;∂) et teorem i T og man har T :– F. Induksjonstrinnene for modus ponens og universell generalisering er åpenbare. Det er også nødvendig å vise:

Th(S, L(T;∂)) Inkl Th(S,L(T)).

Dette gjøres ved induksjon på Th(S, L(T;∂)). Man ser temmelig lett ved inspeksjon av S-aksiomene i L(T;∂) at disse også må være S-aksiomer i L(T). Videre er det klart at Th(S,L(T)) er lukket under slutningsreglene R1 – R6. **Q.E.D.**

Lemma 5.2 La T være en komplett Henkin S-teori i L. Da er også T;∂ en komplett Henkin S-teori i L(T;∂).

Bevis: La F êCFm(L(T;∂)). Da har man at FêCFml(L(T)). Siden T er en komplett teori har man at (1) T :– F v T :– (¬F). Siden F = ∂(F) og (¬F) = (¬F);∂ = ¬(F;∂) følger fra (1) og Lemma 5.1 at T;∂ :– F v T;∂ :– (¬F), dvs. at T;∂ er komplett.

Anta (Ex)F er en lukket formel i L(T;∂). Da må den også være en lukket formel i L(T). Siden T er en Henkin-teori finnes det en konstant c i L(T) slik at:

T :– (Ex)F –> F;x[c]. La c;0 = ∂([c];T). Da har man T :– c;0 = c og derfor ved hjelp av identitetsaksiomene i T at T :– (Ex)F –> F;x[c;0]. Men (Ex)F –> F;x[c;0] er en formel i L(T;∂) og derfor har man i lys av definisjonen av T;∂ at T;∂ :– (Ex)F –> F;x[c;0]. T;∂ er følgelig en Henkin-teori. **Q.E.D.**

Lemma 5.3 La T være en komplett Henkin S-teori i L og at T;∂ er en ∂-kontaksjon av T. Anta c,c'êConst(L(T;∂)). Da gjelder:

(1) (T;∂ :– c≠c') <–> c≠c' (mao. konstantene c og c' er distinkte)

(2) (T;∂ :– c=c') <–> c=c'

Beviset for denne satsen overlates til leseren.

§6 Nec-underordnede og ¬Pos¬- underordnede teorier.

La T være en komplett Henkin-teori. Vi skal definere når en teori T' er Nec-underordnet T;∂ og når den er ¬Pos¬-underordnet T;∂ hvor ∂ er e utvalgsfunksjon over [Const(L(T))/ ≈;T].

En teori T' sies å være underordnet T;∂ hvis og bare hvis den enten er Nec-underordnet eller ¬Pos¬-underordnet T;∂.

(A) Med k(Δ), der Δ Inkl Fm(L), forstår vi mengden av alle de konstantene som forekommer i formlene i Δ. Vi definerer:

(1) Ker;a(T) = Mg(F: FêCFm(L(T)) & T :– Nec(F))
(2) Ker;b(T) = Mg(F: FêCFm(L(T)) & T :– ¬Pos(¬F))

La T være en komplett Henkin-teori. Vi betrakter T;∂ for en eller annen utvalgsfunksjon over ∂ med domene [Const(L(T))/≈;T].

Anta GêCFm(L(T;∂)), videre at k({G}) Inkl k(Ker;a(T;∂)) og dessuten at T;∂ :– ¬Nec¬(G). Vi sier da at formelen G er mulig med hensyn på T;∂. La T' være teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i Ker;a(T;∂)U{G} og ingen andre. Språket til T' er som språket til T;∂, men med konstantmengden begrenset til k(Ker;a(T;∂)U{G}). Vi antar at G er mulig med hensyn på T;∂. Under disse omstendighetene har man:

Lemma 6.1 T' er konsistent

Anta for reduktio ad absurdum at T' er inkonsistent. Da har man at det finnes en formel H i L(T') slik at T' :– H&¬H . I lys av reduksjons-teoremet følger det at det må finnes F;1,...,F;n êKer;a(T;∂) slik at

S :– (F;1&... & F;n & G –> H&¬H) Herav:
(3) S :– F;1&.... & F;n –> ¬G.

Siden G er mulig med hensyn på T;∂ kan vi anta at k({¬G}) Inkl k({F;1,....F;n}). Fra (3) har vi derfor ved hjelp av R4:

(4) S :– Nec(F;1) & .... & Nec(F;n) –> Nec(¬G) Herav:
(5) T;∂ :– Nec(F;1) & .... & Nec(F;n) –> Nec(¬G).

Siden F;1,....,F;nêKer;a(T;∂) følger:

(6) T;∂ :– Nec(F;i) for i=1,....,n. Dette ammen med (5) gir en
(7) T;∂ :– Nec(¬G). Siden G er mulig med hensyn på T;∂ har vi imidlertid T;∂ :– ¬Nec(¬F) som sammen med (7) impliserer at T;∂ er inkonsistent. Men det er umulig.
Q.E.D.

Siden T' er konsistent kan den utvides til en komplett Henkin-teori T*. Vi bruker helt nye spesielle konstanter når vi utvider til en Henkin-teori, dvs. konstanter som hverken forekommer i L(T) eller L(T;∂). Da har man:

(8) Const(L(T*))Ω Const(L(T)) = k(Ker;a(T;∂)).

Vi beviser så det følgende lemma:

Lemma 6.2 Er c;1, c;2êk(Ker;a(T;∂)) og c;1≠c;2 holder T* :– (c;1 ≠ c;2).

Bevis: Siden c;1,c;2êk(Ker;a(T;∂)) må c;1 forekomme i en eller annen formel F der ma har T;∂ :– F og c;2 må forekommer i en eller annen formel G der man har T;∂ ;– G. Ved hjelp av R4 har man

T;∂ :– Nec(F) –> (Nec(G) –> Nec(F&G))

Det følger derfor ved hjelp av modus ponens at T;∂ :– Nec(F&G). Siden c;1≠c;2 har man ved hjelp av Lemma 5.3 at T;∂ :– (c;1≠c;2). Ved hjelp av A18 må man så ha at T;∂ :– Nec(c;1 ≠ c;2) siden:

S :– Nec(F&G) –> (c;1≠c;2 –> Nec(c;1≠c;2)) og derfor:

T;∂ :– Nec(F&G) –> (c;1≠c;2 –> Nec(c;1≠c;2)). Det følger at (c;1≠c;2)êKer;a(T;∂) og derfor at (c;1≠c;2 er et ikke-logisk aksiom i T' og defor i T*. Men da må man ha T* :– (c;1≠c;2). **Q.E.D.**

Betrakt C = [Const(L(T*))/≈;T*]. I lys av Lemma 6.2 følger det at distinkte konstanter i k(Ker;a(T:∂)) hører med til distinkte ekvivalensklasser i C. Man ser også at dersom xêC så inneholder d(x)= xΩk(Ker;a(T;∂)) en og bare en konstant om den er ikke-tom. Vi definerer en utvalgsfunksjon ∂* ved å stipulere (i) at dersom xêC og d(x)≠ø så er ∂*(x) = (iw)(wêd(x)), og ved å sette (ii) at dersom xêC og d(x)=ø så skal ∂*(x)êx. Vi ser så på T*;∂*. Denne teorien er konstruert med utgangspunkt i T;∂ på en bestemt måte. Vi sier at enhver teori som er konstruert ut fra T;∂ på denne måten er Nec-underordnet T;∂.

(B) Vi ønsker å definere når en teori T er ¬Pos¬-underordnet T;∂. La T være en komplett Henkin-teori. Anta GêCFml(L(T;∂)) og anta T;∂ :– Pos(G). Vi sier da at G er *tillatt* med hensyn på T;∂.

Anta G er tillatt med hensyn på T;∂. Definer C;(G,T;∂) ved:

C;(G,T;∂) = Ker;b(T;∂)Ω

Mg(F : FêCFm(L(T;∂)) & k({F}) Inkl k(Ker;a(T;∂)U{G}) U {G} U Ker;a(T;∂)

La T' være teorien der de ikke-logiske aksiomene er nøyaktig formlene i C;(G,T;∂) og der språket er språket til T;∂, men med konstantmengden begrenset til k(Ker;a(T;∂)U{G}). Man ser at k(C;(G,T;∂)) Inkl k(Ker;a(T;∂)U{G}).

Lemma 6.3 La T' være konstruert som ovenfor. Da er T' konsistent.

Bevis: Anta det motsatte. Da har man T' :– (H&¬H) for en eller annen formel H i L(T'). Ifølge Reduksjonsteoremet må det da finnes

(1) F;1,....,F;nêKer;b(T;∂)Ω
Mg(F : FêCFm(L(T;∂)) & k({F}) Inkl k(Ker;a(T;∂)U{G}) og

(2) G;1,...,G;jê k(Ker;a(T;∂) u {G}) slik at:

S :– (F;1&.... & F;n & G;1 &....&G;j & G. –> H&¬H)

Herav:

(3) S :– (F;1&....&F;n & G;1&....&G;j –> ¬G)

Vi kan anta at konstantene som forekommer i F;1,...,F;n forekommer i enten G;1,...,G;n eller ¬G. Ved hjelp av R5 og A16 har man da fra (3):

S :– ¬Pos(¬F;1) &....&¬Pos(¬F;n) & Nec(G;1,...,G;j). –> ¬Pos(¬¬G)

Herav følger så:

(4) T;∂ ;– ¬Pos(¬F;1) &....&¬Pos(¬F;n) & Nec(G;1,...,G;j). –> ¬Pos(¬¬G)

Nå har man i lys av (1) og definisjonen av "Ker;b" at

(5) T;∂ :– ¬Pos(¬F;p) for p=1,...,n Videre her vi fra (2) og definisjonen av "Ker;a":

(6) T;∂ :– Nec(G;1& .... & G;j). (4), (5) og (6) gir en:

(7) T;∂ :– ¬Pos(¬¬G). Ved hjelp av regelen R6 kan man vise:

(8) T;∂ :– ¬Pos(¬¬G) –> ¬Pos(G).

I lys av (7) må man derfor ha: T;∂ :– ¬Pos(G). Men dette strider mot at T;∂ er konsistent og G er tillatt med hensyn på T;∂.

Siden T' er konsistent kan den i lys av Teorem 4.6 og Teorem 4.7 utvides til en komplett Henkin-teori T*. Vi bruker helt nye spesielle konstanter når vi utvider T' til T*. Da har man:

(9) Const(L(T*))Ω Const(L(T)) = k(Ker;a(T;∂)U{G})

Man har:

Lemma 6.4 Er c;1,c;2êk(Ker;a(T;∂)U{G}) og c;1 ≠ c;2 så har man at T* :– (c;1≠c;2)

Bevis: Fra hypotesene har vi i lys av Lemma 5.3 at T;∂ :– c;1≠c;2. Derfor har man ved hjelp av A19 at T;∂ ;– ¬Pos(¬(c;1≠c;2)). Man har da:

(c;1≠c;2)êKer;b(T;∂)Ω

Mg(F : FêCFm(L(T;∂)) & k({F}) Inkl k(Ker;a(T;∂)U{G})

Det følger at (c;1≠c;2)êC;(G,T;∂) og derfor at c;1≠c;2 er et ikke-logisk aksiom i T'. Siden T* er en utvidelse av T' følger at T* :– (c;1 ≠ c;2). Q.E.D.

Sett p = [Const(L(T*))/≈;T*]. I lys av Lemma 6.4 ser man at dersom xêp så har man at h(x) = xΩ k(Ker;a(T;∂)U{G}) inneholder nøyaktig ett element om den er ikke-tom. Vi kan derfor definere en utvalgsfunksjon ∂* med p som domene ved å sette at ∂*(x) = (iz)(zêh(x)) om h(x)≠ø og xêp, og ved å sette at ∂*(x)êx om xêp & h(x)=ø. Betrakter man nå ∂*-kontraksjonen T*;∂* av T* ser man at denne er konstruert med utgangspunkt i T;∂ på en bestemt måte. Enhver teori som er konstruert med utgangspunkt i T;∂ på denne måten sier vi at er ¬Pos¬-underordnet T;∂.

§7 Fullstendigheten til de kalkylene som har blitt introdusert.

I denne paragrafen skal vi gi bevis for det følgende resultat:

Teorem 7.0 (Fullstendighetsteorem) La T være en konsistent S-teori i L. Da finnes det en S-modell R for L som er en modell for T.

Vi skal, gitt en komplett Henkin S-teori T, konstruere en S-modell R som er en modell for T.

Vi starter med en komplett Henkin S-teori. La oss kalle den T. Vi velger så ut en utvalgsfunksjon ∂ over [Const(L(T))/≈;T] og betrakter ∂-kontraksjonen T;∂ av T. La oss nå betegne mengden av alle de formler G der vi har at

(i) GêCFm(L(T;∂))

(ii) k({G}) Inkl k(Ker;a(T;∂)) og

(iii) T;∂ :– ¬Nec(¬G)

med Z1. Z1 vil være en i høyden tellbart uendelig mengde med formler. La oss tenke oss at vi har enummerert denne og at formlene er G;0, G;1,...,G;n,.... osv. For hver av disse formlene konstruerer vi nå en teori som er Nec-underordnet G;i, la oss kalle denne T(G;i), på den måten som ble beskrevet i §6. T(Gi) vil da være konstruert i to stadier: Vi danner først S-teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i Ker;a(T;∂)U{G;i} og ingen andre, og der språket er språket til T;∂ med konstantmengden begrenset til k(Ker;a(T;∂)U{G;i}). Vi utvider så denne teorien til en komplett Henkin-teori ved å legge til nye spesielle konstanter og spesielle aksiomer. På dette punkt er konstruksjonen ikke entydig bestemt. Men det er åpenbart mulig å velge helt nye konstanter ved utvidelsesprosessen som ikke forekommer i noen av teoriene man så langt har konstruert. Vi velger så ut en eller annen ∂-kontraksjon av denne teorien på måten beskrevet i §6. Også her kan man velge mellom flere muligheter. La oss kalle den resulterende teori for T(G;i). Vi har dermed konstruert en sekvens av teorier T(G;0), T(G;1), T(G;2),..... som alle er Nec-underordnet T;∂.

Vi betrakter så mengden av alle de formler H der vi har:

(i) HêCFm(L(T;∂)) og

(ii) T;∂ :– Pos(H).

La oss kalle denne formelmengden for Z2. Også Z2 vil være en i høyden tellbart undelig mengde med formler. La oss tenke oss at vi har ennummerert denne mengden, og at formlene i den er H;0, H;1,...., H;n,..... osv. For hver formel H;i konstruerer vi nå en teori T*(H;i) som er ¬Pos¬-underordnet T;∂ på den måten som ble beskrevet i §6, avsnitt (B). Teorien T*(H;i) (i=1,2,.....) er konstruert ved at vi først danner teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i C;(H;i,T;∂) og lar språket til denne teorien være L(T;∂) med konstantmengden begrenset til
k(Ker;a(T;∂)U{H;i). Denne teorien utvides så til en komplett Henkin-teori ved at vi legger til nye spesielle konstanter og aksiomer, og utvider den til en komplett teori ved hjelp av Lindenbaums metode. Tilslutt velger vi ut en ∂-kontraksjon og får teorien T*(H;i). Vi har dermed konstruert en sekvens av teorier T*(H;0), T*(H;1), T*(H;2),..... som alle er ¬Pos¬-underordnet T;∂.

Vi skal kalle alle teoriene T(G;0), T(G;1),.... T*(H;0), T*(H;1),.... osv. som er konstruert på måten ovenfor for teoriene på nivå 1. T;∂, som vi starter med, er den eneste teorien på nivå 0. Man ser at alle teoriene på nivå 1 er underordnet T;∂. La oss nå tenke oss at vi har definert alle teoriene på nivå n der n≥1. La oss betegne denne mengden av teorier med Nivå;n. Vi konstruerer så klassen av alle teorier på nivå (n+1) på følgende måte. La T;j være en teori som er med i Nivå;n. Vi konstruerer da en sekvens av underordnede teorier til T;j, la oss kalle dem, T;<j,0>, T;<j,1>, T<j,2>,..... på nøyaktig samme måte som vi konstruerte teorimengden T(G;0), T(G;1),.... T*(H;0), T*(H;1),.... med utgangspunkt i T;∂. Ved konstruksjonen av de underordnete teorier må man imidlertid sørge for at de nye konstanter man trenger ved konstruksjonen av en teori ikke er brukt ved konstruksjonen av noen tidligere teori på samme nivå eller lavere nivå. Er T en teori på nivå n betegner vi klassen av alle de teoriene vi konstruerer på denne måten og som er underordnet T med "u(T)". Vi definerer så nivå n+1 ved:

Nivå;(n+1)= UN/TêNivå;n/(u(T))

Det bør bemerkes at det ikke er noe i veien for at det kan finnes en teori på et eller annet nivå som ikke har noen underordnete teorier.

Vi kan nå definere en modell R for T. Vi definerer først modellstrukturen i modellen, <G,K,¶, *f*,*>. Vi setter G=T;∂. Videre lar vi K være definert ved:

K= UN/nêN/Nivå(n)

Vi la U være relasjonen 'underordnet' mellom elementene i K. Mao. har man dersom H;1, H;2êK at <H;1,H;2>êU hvis og bare hvis H;2 er en teori som er underordnet H;1. Vi setter at ¶ = U om systemet vi arbeider med er QK. Vi lar ¶ være den minste relasjonen, den minste serielle relasjonen, den minste transitive relasjonen, den minste transitive og serielle relasjonen, den minste refleksive relasjonen og den minste transitive og refleksive relasjonen som inkluderer U alt ettersom den logikken vi arbeider med er QK, QKD, QK4, QK4D, QT eller QS4. Vi lar objektet * være en eller annen formel i L(T;∂). Er HêK setter vi *f*(H) = Const(L(H)). Dermed er modellstrukturen <G,K,¶,*f*,*> fullstendig definert. For å definere modellen fullstendig vil det nå være nok å definere en intepretasjon I assosiert med modellstrukturen <G,K,¶,*f*,*> og språket L(T). L(T) er språket til den teorien T vi konstruerer en modell for. Vi gjør dette slik:

(a) Er P et n-ært predikat i L(T) og HêK setter vi:

I(P,H) = Mg(<c;1,...,c;n>: c;1,...,c;nêConst(L(H)) &
H :– P(c;1,...,c;n))

Det bør bemerkes at dette er veldefinert i lys av identitetsaksiomene.

(b) Er f et n-ært funksjonsymbol i L(T) og HêK setter vi:

I(f,H) = Mg (<<c;1,...,c;n>,c;(n+1>: c;1,...,c;(n+1) êConst(L(H)) &
H :– f(c;1,...,c;n)=c;(n+1))

Også dette er veldinert i kraft av identitesaksiomene.

(c) Vi setter:

$$I(s,H) = (iy)([H :\!- (Ex)(x=s) \,\&\, (Ec)((H :\!- s=c) \,\&\, y=c)] \vee [\neg(H :\!- (Ex)(x=s)) \,\&\, y=*])$$

om s er en singulær term i snever forstand i L(T). Man kan lett vise at betingelsen etter i-operatoren er oppfylt av ett og bare ett objekt.

(d) Er e en konstant i L(H) der HêK setter vi I(e,H') = e for alle H'êK
Er aê Const(L(T)) settes I(a,H') = ∂([a];T) for alle H'êK

Dermed har vi gitt enfullstendig definisjon av modellen R = <M,I, ∏> siden ∏ er entydig bestemt straks M og I er bestemt.

Den neste oppgaven er å bevise den følgende hjelpesetning:

Lemma 7.1 For enhver HêK gjelder dersom FêCFm(L(H)) at:

(i) H :– F <–> ∏(F,H)=1

(ii) H :– ¬F <–> ∏(F,H)=0

Er videre cêConst(L(H)) og t en lukket term i L(H), ie, têCTerm(L(H)), gjelder:

(iii) H :– (t=c) <–> ∏(t,H) = c

Bevis: Beviset er ved induksjon på lengden av velformede uttrykk.

(i) Anta Nec(F)êCFm(L(H)) og at H :– Nec(F). La H' være et vilkårlig element i K som er Nec-underordnet H. Vi har siden H :– Nec(F) at FêKer;a(H) og derfor at F er et ikke-logisk aksiom i H'. Det følger da at H' :– F. Etter induksjons-hypotesen har man da ∏(F,H')=1. Anta H' er ¬Pos¬-underordnet H. Siden FêKer;a(H) har vi igjen at F er et ikke-logisk aksiom i H' (Konsulter i denne forbindelse definisjonen av hva som menes med "¬Pos¬-underordnet".) Det følger at H' :– F og derfor ved hjelp av induksjonshypotesen at ∏(F,H')=1. Vi har siden H' var et vilkårlig element i K som var underordnet H at ∏(F,H')=1 for alle H' der <H,H'>ê¶. Det følger at ∏(Nec(F),H)=1.

Det er også nødvendig å vise at kondisjonalen mot venstre i (i) holder. Anta derfor at Nec(F)êCFm(L(H)) og at ¬(H :– Nec(F)). Siden H er en komplett teori følger H :– ¬Nec(F) og derfor H :– ¬Nec(¬(¬F)). Vi sondrer nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H)). Da er ¬F mulig med hensyn på H og det må finnes en H' der H' er Nec-underordnet H slik at ¬F er et ikke-logisk aksiom i H'. Da H' :– ¬F og følgelig etter induksjonshypotesen at ∏(F,H')=0.

Tilfelle (ii): Anta ¬(k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H))). Vi må vise at i dette tilfellet finnes en H' der H' er underordnet H og der F er en usann eller uten sannhets-verdi i H'. Siden vi har H :– ¬Nec(F) har vi ved hjelp av A19 at
H :– Pos(G–>G) for en eller annen konstantfri, lukket formel G i L(H). Sett E =(G–>G). Man må ha at ¬(k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H) U {E})) og at k(Ker;a(H) U {E}) = k(Ker;a(H)) siden E er konstantfri. Det er klart at E er tillatt med hensyn på H. Det må derfor finnes en H'êK som er ¬Pos¬-underordnet H og der C;(E,H) Inkl H'. Videre må man ha:

Const(L(H')) Ω Const(L(H)) = k(Ker;a(H) U {E} = k(Ker;a(H)). Siden ¬F er en formel i L(H) følger det at ¬F ikke kan være noen formel i L(H'). Dette impliserer at ¬F, og derfor F, er uten sannhetsverdi i H'.

I begge tilfelle følger at det finnes en H'êK der <H,H'>ê¶ og der ∏(F,H')=0 eller der ∏(F,H') er udefinert. Men herav følger ∏(Nec(F),H)=0 som er det vi ønsker.

(ii) Vi ser så på induksjonstrinnet for "Pos". Anta Pos(F)êCFm(L(H)) og anta

H :– Pos(F). Man ser da at det må finnes en H' som er ¬Pos¬-underordnet H og der F er et ikke-logisk aksiom i H'. Da har man H' :– F og etter induksjons-hypotesen følger ∏(F,H')=1. Da har man ∏(Pos(F), H) =1.

Anta Pos(F)êCFm(L(H)) og at ¬(H :– Pos(F)). Siden H er en komplett teori følger herav at H :– ¬Pos(F). Fra dette kan man slutte ved hjelp av R6 at at

(1) H :– ¬Pos(¬(¬F)). La H' være underordnet H. Det er to muligheter.

Tilfelle (i): H' er ¬Pos¬-underordnet H. Da finnes det en formel G slik at H :– Pos(G) og der man har C;(G,H) Inkl H'.

Undertilfelle (i.a): k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H) U{G}). Da har man (¬F)êC(G,H) Inkl H' og derfor at H' :– ¬F. Etter induksjonshypotesen følger da ∏(F, H')=0.

Undertilfelle (i.b): ¬(k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H) U{G})). Da kan (¬F) ikke være noen formel i L(H'). Da er F uten sannhetsverdi i H', dvs. ∏(F,H), og derfor ∏(¬F,H), er udefinert.

Tilfelle (ii): H' er Nec-underordnet H.

Undertilfelle (ii.a): k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H)). Det må i så fall finnes en formel E slik at EêKer;a(H) og der man har:

(2) H :– Nec(E) og k({¬F}) Inkl k({E}) Fra dette og A17 må man ha: H :– Nec(E) –> (¬Pos(¬(¬F)) –> Nec(¬F)). Dette (1) og (2) gir en H :– Nec(¬F). Herav følger (¬F) êKer;a(H) Inkl H'. Da H' :– (¬F). Etter induksjonshypotesen følger i så fall ∏(F,H') = 0.

Undertilfelle (ii.b): ¬(k({¬F}) Inkl k(Ker;a(H))). Da er (¬F) ikke noen formel i L(H'). Man har i så fall at ∏(F,H') er udefinert.

Man ser at i alle tilfelle er F enten usann eller uten sannhetsverdi i H' der <H,H'>êR. Det følger at ∏(Pos(F),H)=0.

(iii). Man ser at Lemma 7.1 holder per definisjon om t er en konstant i L(H).

(iv) Anta t=s der s er en singulær term i snevner forstand. Anta ∏(t,H) =c. Da har manH

(1) c = (iy)([H :– (Ex)(x=s) & (Ec)((T :– s=c) & y=c)] v [¬(H :– (Ex)(x=s)) & y=*])

Det følger fra dette at det finnes c' slik at H :– (s=c') og c'=c. Men dette impliserer H :– s=c som er det vi ønsker. Har man på den annen side at H :– s=c ser man at betingelsen innen for området til i-operatoren er oppfylt av ett og bare ett objekt x. Siden H er en ∂-kontraksjon med hensyn på en eller annen utvalgsfunksjon ∂ følger det at dette objektet x må være konstanten c. man har derfor i lys av konstruksjonen av modellen R at R(t,H) =c.

(iv) Anta t = f(t;1,...,t;n) og at H :– (F(t;1,...,t;n) = c). Ved hjelp av aksiomene for funksjonsymboler har man H :– (Ex)(x=t;i) for i=1,...,n. Siden H er en Henkin-teori må det følgelig finnes konstanter c;1,...,c;n slik at H :– (c;i = t;i) for i=1,..,n. Etter induksjonshypotesen må vi da ha (1) ∏(t;i,H)=c;i for i=1,...,n. Ved hjelp av identitetsaksiomene for funksjonssymboler følger H :– f(c;1,...,c;n) = c. I lys av definisjonen av ∏ har man da <c;1,...,c;n,c>ê∏(f,H). Dette og (1) gir en <∏(t;1,H),....,∏(t;n,H),c>ê∏(f,H) og derfor ∏(f(t;1,...,t;n),H) = ∏(t,H) = c som er det vi ønsker.

Anta på den annen side at ∏(f(t;1,...,t;n),H) = c. Fra valuasjonsreglen for funksjonsymboler følger ∏(t;i,H)êf(H) for i=1,...,n. Følgelig finnes det c;1,...,c;n i L(H) slik at (2) ∏(t;i,H) = c;i (i=1,...,n). Fra dette og induksjonshypotesen følger (3) H :– (t;i = c;i) (i=1,...,n). Det følger at <c;1,...,c;n,c>ê∏(f,H). Dette og definisjonen av ∏ impliserer at H :– f(c;1,...,c;n) = c. I lys av (3) og identitets-aksiomene for funksjonsymboler gir dette oss H :– (f(t;1,....,t;n) = c) som er det vi ønsker.

(v) Anta t=(ix)F og at ∏((ix)F, H) = c. Dette er tilfelle hvis og bare hvis ∏(F;x[i], H) = 1 for et og bare et navn iêπ(H) og ¢(i) = c. Siden hvert navn iêπ(H) er navn på en og bare en konstant i L(H) er dette tilfelle hvis og bare hvis ∏(F;x[c'], H)=1 for en og bare en konstant c' i L(H) der c'=c. (Jmf. Lemma 2.3) Etter induksjonshypotesen må dette være tilfelle hvis og bare hvis H :– F;x[c'] for en og bare en konstant c' i L(H) der c'=c. Vi viser at dette er ekvivalent med H :– (Ax)(F <–> x=c). (a) Anta H :– (Ax)(F <–> x=c) og at det finnes distinkte konstanter c;1 og c;2 der H :– F;x[c;1] og H :– F;x[c;2]. Da har man H :– (c;1=c;2). Men dette er umulig i følge Lemma 5.3 (b) Anta H :– F;x[c'] for en og bare en konstant c' i L(H) der c'=c, dvs. anta (Ac')((H :– F;x[c']) <–> c'=c). I lys av Lemma 5.3 er dette ekvivalent med (Ac')((H :– F;x[c']) <–> (H :– (c'=c)). Siden H er en komplett teori er dette ekvivalent med (Ac')(H :– (F;x[c'] <–> c'=c)). Siden H er en Henkin-teori er dette ekvivalent med H :– (Ax)(F <–> x=c). Men dette er i lys av beskrivelsesaksiomene ekvivalent med H :– (ix)F = c. Dette er hva vi ønsker.

(vi) Anta F = P(t;1,...,t;n) og anta H :– P(t;1,...,t;n). Da har man H :– (Ex)(x=t;i) for i=1,...,n ved hjelp av aksiomene for termer. Siden H er en Henkin-teori finnes konstanter c;1,...,c;n i L(H) slik at H :– (c;i = t;i) (i=1,...,n) Etter induksjons-hypotesen har vi da (1) ∏(t;i,H) = c;i (i=1,...,n) og videre (2) H :– P(c;1,...,c;n) ved hjelp av termaksiomene. Da har man ved hjelp av definisjonen av ∏ at <c;1,...,c;n>ê∏(P,H). Ved hjelp av (1) kan man fra dette slutte at (3) ∏(P(t;1,...,t;n),H) =1. Antar man, omvendt, at (3) holder følger det at R(t;i,H)ê*f*(H) for i=1,...,n. Etter definisjonen av R finnes det da konstanter c;1,....,c;n i L(H) slik at (4) R(t;i,H) = c;i (i=1,...,n). Etter induksjonshypotesen har man i så fall H :– (t;i = c;i). Men

∏(P(t;1,...,t;n),H) = <∏(t;1,H),...,∏(t;n,H)>ê∏(P,H).

Dette og (4) følger <c;1,...,c;n>ê∏(P,H) og derfor ved hjelp av definisjonen av ∏(P,H) at H :– P(c;1,...,c;n). Men da H :– P(t;1,...,t;n) ved hjelp av termaksiomene.

(vii) Er F en formel av typen (G–>H) eller ¬G er beviset greit og overlates til leseren. Anta F = (Ax)G og at H :– (Ax)G. Siden H er en Henkin-teori er dette ekvivalent med H :– G;x[e] for alle konstanter e i L(H). Etter induksjons-hypotesen er dette ekvivalent med ∏(G;x[e], H) =1 for alle konstanter e i L(H). ved hjelp av Lemma 2.3 er dette ekvivalent med ∏(G;x[i],H)=1 for alle navn i der iêπ(H). Men dette er ekvivalent med ∏((Ax)F,H) =1.

Dette avslutter beviset for Lemma 7.1. **Q.E.D.**

La oss nå avslutte beviset for Teorem 7.0. Anta T' er en konsistent S-teori i L'. I lys av Teorem 4.6 og 4.7 finnes det da en komplett Henkin S-teori T i L der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter og hvor vi har

(1) (AF)(FêFm(L') & T' :– F –> T :– F.) La R være den kanoniske modellen for L konstruert på måten vi har beskrevet ovenfor. Da har man ved hjelp av Lemma 7.1 at:

(2) (AF)(FêCFm(L(T;∂)) –> T;∂ :– F <–> R(F, G(R)) =1).

La nå F være en vilkårlig formel i L' der vi har (3) T':– F. La F* være den universelle lukningen av F. Det følger da at (4) T' :– F*. Man har at F er gyldig i enhver S-modell for L' hvis og bare hvis F* er gyldig i enhver S-modell for L'. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise ar F* er gyldig i R. Fra (4) og (1) følger at (5) T :– F*. Ved hjelp av Lemma 5.1 har vi at

(6) T :– F* <–> T;∂ :– ∂(F*).

I lys av konstruksjonen av modellen R ser man lett at (7) R(∂(F*),G(R)) = 1 <–> R(F*, G(R)) =1. Det følger fra (2), (5), (6) og (7) at (8) R(F*, G(R)) =1. Nå er F* en formel en lukket formel i L'. Er R' restriksjonen av R til L ser man at R(F*,G(R)) = R'(F*,G(R')) i lys

av Lemma 2.5. Det følger at R'(F*,G(R')) =1. Dette impliserer at F er gyldig i R'. Men F var et vilkårlig teorem i T'. Man ser derfor at R' er en modell for T'. Dette avslutter beviset for Teorem 7.0.

§8 Fullstendigheten til en del relaterte systemer.

Vi betrakter formelen:

(E) (Ax)Nec((Ey)(y=x))

Resultatet av å legge (E) til et av systemene QK, QKD, QK4, QK4D, QT eller QS4 som nytt logisk aksiom kaller vi henholdsvis for QK+, QKD+, QK4+, QK4D+, QT+ og QS4+. Vi bruker "S+" for å betegne et vilkårlig system i den sistnevnte sekvensen.

Teorem 8.1 For hvert S+ system gjelder:

(c) S+ :– F –> S+ :– Nec(F)
(a) S+ :– Nec(F) <–> ¬Pos¬(F)
(d) S+ :– (x ≠ y –> Nec(x ≠ y))
(e) S+ ;– (x = y –> Nec(x = y))

Bevis: (a) La y;1,...,y;n være de fri variablene som forekommer i F og c;1,...,c;m de konstantene som forekommer i F. Anta S+ :– F. Fra dette følger:

S+ :– (Ez)(z=y;1) &....& (Ez)(z=y;2) & (Ez)(z=c;1)&...& (Ez)(z=c;m) –> F

Ved hjelp av R4 følger fra dette:

S+ :– Nec((Ez)(z=y;1)) &....& Nec((Ez)(z=y;2)) &
Nec((Ez)(z=c;1)) &...& Nec((Ez)(z=c;m)). –> Nec(F)

Dette og (E) gir en S+ :– Nec(F).

(b) La y;1,...,y;n være de variablene som forekommer fri i F og la c;1,...c;m være konstantene som forekommer i F. Da har man:

(1) S+ :– (y;1=y;1 &....&y;n = y;n & c;1=c;1 &..... & c;m = c;m)

Fra dette og (a) følger:

(2) S+ :– Nec(y;1=y;1 &....&y;n = y;n & c;1=c;1 &..... & c;m = c;m)

Nå har man i lys av A17 at:

(3) S+ :– Nec(y;1=y;1 &....&y;n = y;n & c;1=c;1 &..... & c;m = c;m) –>.
Nec(F) <–> ¬Pos(¬F)

Fra (2) og (3) følger så: S+ :– Nec(F) <–> ¬Pos¬(F).

(c) Fra A18 følger: Nec(x=x & y=y) –> (x≠y –> Nec(x ≠ y)

Nå har man S+ :– x=x & y=y. Ved hjelp av dette og resultatet under punkt (a) følger (x ≠ y –> Nec(x ≠ y)).

(d) Ved hjelp av aksiomene for identitet i S+ kan man utlede:

S+ :– x=y –>. Nec(x=x) –> Nec(x=y). Siden S+ :– (x=x) følger ved hjelp av (a) at (x = y –> Nec(x = y)). **Q.E.D.**

Det følgende diagram som viser inklusjonsforholdene mellom de predikat-kalkylene som har blitt studert så langt:

En S-modell R som tilfredsstiller det følgende krav:

(E+) (AH)(AH')(H,H'êK(R) & <H,H'>êR(¶). –> f(R)(H) Inkl f(R)(H'))

kaller vi en S+ -modell. Det er lett å se at (E) er gyldig i alle S+ -modeller. Man har derfor:

Teorem 8.2 (Gyldighetsteorem) Er T = ß(Δ,S+,L) en S+ -teori i L og er R en modell for Δ så er F gyldig i R om Fêß(Δ,S+,L) ie. om T :– F.

Vi har dessuten:

Teorem 8.3 (Kompletthetsteorem) La T være en konsistent S+ -teori i L. Da finnes det en S+ -modell R for L som er en modell for T.

Bevis: Beviset er som for Teorem 7.0. Vi behøver bare å verifisere at den "kanoniske" modellen vi konstruerte i §7 tilfredstiller kravet (E+) når E er et aksiom som er nærværende i alle teoriene HêK. (K er definert som i §7). Siden E er et aksiom i H har man at Const(L(H)) Inkl k(Ker;a(H)) Inkl Const(L(H')) for enhver H' der H' er underordnet H. Fra dette følger det så lett at den konstruerte modellen oppfyller kravet (E+). **Q.E.D.**

Del II

§9 Individuerende funksjoner.

Skjemaet (1) Nec(F) –> (x ≠ y –> Nec(x≠y)), med det forbehold at variabeltegnene x og y forekommer fri i formelen F, er som vi har sett gyldig i enhver av de modellene som vi så langt har tatt i betraktning. Tolkes "Nec" som "Det er logisk nødvendig at" eller som "Det er kausalnødvendig at" virker ikke skjemaet spesielt urimelig, men gis Nec-operatoren en epistemisk eller doxastisk tolkning er det trolig at få vil akseptere det uten videre. I de forskjellige S+ -systemene vi har beskrevet i Del I kan man vise at en formel som er enda mer utfordrende er gyldig, nemlig: (2) x≠y –> Nec(x≠y). Som man ser sier denne setningen at distinkte individer nødvendigvis er distinkte.

Det er klart at det derfor vil være av stor interesse å spesifisere en semantikk for modallogiske språk som passer for de enkelte systemene vi så langt har spesifisert om man utelater aksiomskjemaet (1). I det følgende brukes "S" som plassholder for "QK", "QKD", "QK4", "QKD4", "QT" eller "QS4". "S+" brukes som plassholder for et av de følgende uttrykk "QK+", "QKD+", "QK4+", "QKD4+", "QT+" eller "QS4+". Vi betegner med "S*" det systemet man får fra et S-system om man fjerner aksiomskjemaet (1) ovenfor. Tilsvarende brukes "S+*" for å betegne den kalkylen man får når man fjerner aksiomskjemaet (1) fra kalkylen "S+". Vi skal nå redefinere de semantiske begrepene vi så langt har arbeidet med slik at vi får en semantisk teori for S*-systemene og S+*-systemene.

Vi starter med begrepet modellstruktur:

Definisjon 9.1 Med en modellstruktur forstås et tuple <G,K,¶, *f*,D,*> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) K er en ikke-tom mengde.
(ii) G er et element i K, ie. GêK
(iii) ¶ er en relasjon over K ie. ¶ Inkl KXK
(iv) D er en ikke-tom mengde funksjoner der alle funksjonene har K som domene.
(v) *f* er en funksjon som til hvert element HêK tilordner H en ikke-tom delmengde av D. Man har altså at *f*(H) er en ikke-tom mengde for alle HêK. Vi bruker "Q(H)" for "Mg(x: (Ef)(fê*f*(H) & x= f(H)))".
(vi) * er et objekt som ikke er med i D, men som heller ikke er med i UN/HêK/(Q(H))

Som man ser er hovedforskjellen mellom modellstrukturer av denne nye typen og den gamle typen at vi nå har innført mengden D i modellstrukturene. D representerer mengden av alle de mulige individene. Men de mulige individene er nå representert ved visse funksjoner. Er nå f et mulig individ, ie. er fêD, vil f(H) være det objektet som representerer individet f i verdenen H. f(H) er så og si individet f slik det foreligger i H.

La M være en modellstruktur og L et språk for modallogikk. Med L(M) forstår vi da L utvidet med navn på alle elementene i UN/HêK/(*f*(H)). Er aêUN/HêK/(*f*(H)) bruker vi "¢(a)" for å betegne navnet på objektet a. Er i et navn i L(M) betegner "¢;-1(i)" det objektet som i er navn på. Vi forutsetter at det er en en-entydig korrespondanse mellom navnene i L(M) og objektene i UN/HêK/(*f*(H)). Som før setter vi π(H) = Mg(¢(a) : aê*f*(H)).

La oss nå definere hva som menes med en intepretasjon I assosiert med et modallogisk språk L og en modellstruktur M. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 9.2 La L være et språk for modallogikk og M = <G,K,¶,*f*,D,*> en modellstruktur. Med en intepretasjon assosiert med L og M forstås en funksjon I som oppfyller de følgende krav:

(i) Domenet til I er CXK der C er mengden av de ikke-logiske symbolene i L utvidet med alle navnene i L(M)

(ii) Er i et navn i L(M) og har man at a=¢;-1(i) har man at I(i,H')= a for alle H'êK

(iii) Er c en konstant i L skal det finnes et objekt aê*f*(G) slik at I(c, H)=a for alle HêK.

(iv) Er s en singulær term i snever forstand og HêK har man at I(s,H)êQ(H)U{*}.

(v) Er P et n-ært predikatsymbol i L og HêK skal I(P,H) Inkl Q(H)^n. (Med andre ord tilordner I ethvert par <P,H> der P er et n-ært predikat i L og H en mulig verden i M en n-ær relasjon over Q(H))

(vi) Er f et n-ært fuksjonsymbol i L og HêK er I(f,H) en n-ær funksjon over Q(H), med andre ord er I(f,H) en funksjon der domenet er Q(H)^n og hvor verdiområdet er inkludert i Q(H).

(vii) Er HêK er I(=,H) = Mg(<x,x>: xêQ(H))

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som menes med en intepretasjon assosiert med L og en modellstruktur M.

Vi definere så hva som menes med at ∏ er en valusjon for L assosiert med intepretajonen I og modellstrukturen M. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 9.3 Anta L er et språk for modallogikk, M=<G,K,¶,*f*,*> en modellstruktur , og I en intepretasjon assosiert med L og M. Med valuasjonsfunksjonen ∏ for L assosiert med I og M forstår vi da den minste partielle funksjonen som oppfyller de følgende krav:

(i) Domenet til ∏ er klassen av alle par <u,H> der u er et lukket velformet uttrykk i L(M) og H et element i K.

(ii) Er t en konstant, et navn eller en singulær term i snever forstand i L(M) har man at ∏(t,H) = I(t,H).

(iii) Anta t = f(t;1,...,t;n) der f er et n-ært funksjonsymbol i L og t;1,...,t;n lukkede termer i L(M). (a) Anta ∏(t;i,H) er udefinert for noe iê{1,...,n} eller at t;i er en konstant eller et navn for noe iê{1,..,n} og at ¬(∏(t;i,H)ê*f*(H)). Da er ∏(f(t;1,...,t;n),H) udefinert. (b) Anta for ethvert iê{1,..,n} at dersom t;i er en konstant eller et navn så er ∏(t;i,H)ê*f*(H) og at dersom t;i er en beskrivelse, singulær term i snever forstand eller en term som begynner med et funksjonssymbol så er ∏(t;i,H)êQ(H)U{*}. Da setter vi ∏(f(t;1,...,t;n),H) = ∏(f,H)(a;1,...,a;n), der a;i = ∏(t;i,H)(H), om t;i er en konstant eller et navn, og der a;i = ∏(t;i,H) om t;i er en beskrivelse, en singulær term i snever forstand eller en term som begynner med et funksjonssymbol. Er i dette tilfelle R(t;i,H)=* for noe iê{1,...,n} så er ∏(f(t;1,...,t;n),H)=*.

(iv) Anta t = (ix)F der F er en formel i L(M). Anta ∏(F;x[i], H) er definert

for alle iêπ(H). Finnes det da et og bare et objekt aêQ(H) slik at for alle iêπ(H) har man ¢(i)(H)=1 hvis og bare hvis ∏(F;x[i],H)=1 setter man ∏((ix)F,H)=a. I motsatt fall setter man ∏((ix)F,H) =*. Er ∏(F;x[i], H) udefinert for noe iêπ(H) er ∏((ix)F,H) udefinert.

(v) Anta F = P(t;1,...,t;n) der P er et n-ært funksjonsymbol i L og t;1,...,t;n lukkede termer i L(M). (a) Anta ∏(t;i,H) er udefinert for noe iê{1,...,n} eller at t;i er en konstant eller et navn for noe iê{1,..,n} og at ¬(∏(t;i,H)ê*f*(H)). Da er ∏(P(t;1,...,t;n),H) udefinert. (b) Anta for ethvert iê{1,..,n} at dersom t;i er en konstant eller et navn så er ∏(t;i,H)ê*f*(H) og at dersom t;i er en beskrivelse, singulær term i snever forstand eller en term som begynner med et funksjonssymbol så er ∏(t;i,H)êQ(H)U{*}. Da setter vi ∏(P(t;1,...,t;n),H) = 1 hvis og bare hvis <a;1,...,a;n>êI(P,H), der a;i = ∏(t;i,H)(H), om t;i er en konstant eller et navn, og der a;i = ∏(t;i,H) om t;i er en beskrivelse, en singulær term i snever forstand eller en term som begynner med et funksjonssymbol.

(vi) Anta F= (G;1–>G;2), HêK og at ∏(G;i,H)ê{0,1} for i=1,2. Da har man at ∏(G;1–>G;2,H)=1 hvis ∏(G;1,H)=0 eller ∏(G;2,H)=1, ellers er ∏(G;1–>G;2,H)=0. Er ∏(G;1,H) udefinert eller ∏(G;2,H) udefinert er ∏(G;1–>G;2,H) udefinert.

(vii) Anta F= ¬G og HêK. Anta ∏(G,H)ê{0,1}. Da har man ∏(¬G,H)=1 hvis ∏(G,H)=0, ellers er ∏(¬G,H)=0. Er ∏(G,H) udefinert er ∏(¬G,H) udefinert.

(viii) Anta F= (Ax)G og at HêK. Har man at ∏(F;x[i], H) er definert for alle iêπ(H) er ∏((Ax)F,H)= 1 hvis ∏(F;x[i], H)=1 for alle iêπ(H) ellers er ∏((Ax)F,H)= 0. Har man at ∏(F;x[i], H) er udefinert for et eller annet iêπ(H) har man at ∏((Ax)F,H) er udefinert.

(ix) Anta F = Nec(G) og HêK. Er ∏(G,H) definert har man at ∏(Nec(G),H)=1 hvis ∏(G,H')=1 for alle H' der <H,H'>ê¶, ellers er ∏(Nec(G),H)=0. Er ∏(G,H) udefinert er ∏(Nec(G),H) udefinert.

(x) Anta F = Pos(G) og HêK. Er ∏(G,H) definert har man at ∏(Pos(G),H)=1 hvis ∏(G,H')=1 for en eller annen H' der <H,H'>ê¶, ellers er ∏(Pos(G),H)=0. Er ∏(G,H) udefinert er ∏(Pos(G),H) udefinert.

Dette avslutter definisjonen av hva som menes med valuasjonsfunksjonen ∏ for L assosiert med I og M.

Vi krever av enhver modellstruktur at den skal oppfylle det følgende krav:

(+) Har man at

H,H'êK & <H,H'>ê¶ & f;1, f;2ê*f*(H) & f;1ê*f*(H') og f;1(H) = f;2(H)

gjelder

f;2ê*f*(H') & f;1(H') = f;2(H')

Vi kaller kravet (+) for ikke-forgreningskravet. Når vi i dette og følgende avsnitt snakker om modellstrukturer mener vi alltid, når ikke noe annet er sagt, modellstrukturer som tilfredstiller kravet (+).

Vi definerer modell, gyldighet i en modell og gyldighet som i Del I. Vi bruker også den samme notasjonen som der. Med en QK*, QKD*, QK4*, QKD4*, QT*, QS4* -modell forstår vi henholdsvis en modell, en seriell modell, en transitiv modell, en seriell og transitiv modell, en refleksiv modell, og endelig en refleksiv og transitiv modell for L. I det følgende står "S*" for et eller annet av systemene QK*, QKD*, QK4*, QKD4*, QT*eller QS4*. Vi får det aksiomatiske systemet S* fra S ved å sløyfe aksiomskjemaet A18, dvs. formelen (1) som ble nevnt innledningsvis. Med en S*+ -modell forstår vi en S*-modell som oppfyller kravet (E+) i §8. Med det aksiomatiske systemet S*+ forstår vi systemet S* utvidet med aksiomet (E) som nytt logisk aksiom. Som man husker var (E) den følgende formel: (Ax)Nec((Ey)(y=x)).

Figuren ovenfor gir en oversiktlig fremstilling av inklusjons-forholdene mellom de systemene som ble definert i Del I og de som er blitt definert i denne paragrafen.

Vi overlater til leseren å gi bevis for de følgende to viktige teoremer:

Teorem 9.4 (Gyldighetsteorem) La T =ß(Δ,S*,L) være en S*-teori i L. Anta FêT. La R være en S*-modell for L der F' er gyldig i R om F'êΔ. Da er F gyldig i R.

Teorem 9.5 (Gyldighetsteorem) La T =ß(Δ,S*+,L) være en S*+-teori i L. Anta FêT. La R være en S*+ -modell for L der F' er gyldig i R om F'êΔ. Da er F gyldig i R.

§10 Bevis for fullstendigheten til S* (S*+)-kalkylene.

Vi vender oss nå til fullstendighetsbeviset for S*(S*+)-kalkylene. På samme måte som før kan vi, gitt en konsistent S* (S*+)-teori T, konstruere en komplett Henkin S*(S*+)-teori T' som er en utvidelse av T. Dette skjer ved innføring av spesielle konstanter og Lindenbaums metode slik som beskrevet i §4. Vi bemerker at alle Lemmaene som ble nevnt der fremdeles holder. Når vi heretter snakker om teorier er det bare S* (S*+)-teorier det er spørsmål om.

La T være en konsistent teori. Som før kan vi bevise at teorien T' hvis ikke-logiske hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i Ker;a(T)U{G} og ingen andre er konsistent forutsatt at G er mulig med hensyn på T, dvs. at
T :– ¬Nec(¬G) & GêCFm(L(T)) & k({G}) Inkl k(Ker;a(T)) Vi innfører helt nye spesielle konstanter og utvider T' til en komplett Henkin-teori T*. Vi sier da at T* er Nec-underordnet T. Man ser at når det gjelder konstantene i disse teoriene har man:

k(CFm(L(T*))) Ω k(CFm(L(T))) = k(Ker;a(T)

la nå T være en teori. Anta GêCFm(L(T)). La c;1,...,c;m være alle de konstantene som forekommer i G. Vi definerer [G/ ≈;T] som mengden av alle de formler G;(c;1,...,c;m) [c';1,....,c';m] der T :– (c;i = c';i) (i=1,...,m) og hvor c';1,....,c';m er konstanter i L(T).

La GêCFm(L(T)) der T er en konsistent teori. Anta G er tillatt med hensyn på T, dvs. at T :– Pos(G). La T' være teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i den følgende mengde og ingen andre:

C;(G,T) = Ker;b(T)Ω

Mg(F: FêCFm(L(T)) & k({F}) Inkl k(Ker;a(T)U[G/ ≈;T]))
U [G/ ≈;T] U Ker;a(T)

Språket til T' er L(T), men med konstantmengden begrenset til de konstantene som er med i k(Ker;a(T) U [G/ ≈;T])

Vi har da:

Lemma 10.1 T' er konsistent.

Bevis: Anta T' er inkonsistent. Etter reduksjonsteoremet må det finnes formler der:

(1) D;1,....,D;n êKer;b(T)Ω
Mg(F: FêCFm(L(T)) & k({F}) Inkl k(Ker;a(T)U[G/ ≈;T]))

(2) H;1,...,H;p êKer;a(T)

(3) G;1,....,G;qê [G/ ≈;T] slik at:

(4) S* :– D;1&....&D;n & H;1&...&H;p & G;1&....&G;q –> E&¬E

for en eller annen formel E. Da har vi:

(5) S* :– D;1&....&D;n & H;1&...&H;p –> ¬(G;1&....&G;q)

Vi kan her anta at alle konstantene som forekommer i D;1&....&D;n forekommer enten i H;1&...&H;p eller i ¬(G;1&....&G;q). Ved hjelp av R5 og A16 har man da:

(6) S* :– ¬Pos¬(D;1)&....&¬Pos(¬D;n) &
Nec(H;1&...&H;p) –> ¬Pos(¬(¬(G;1&....&G;q)))
–> ¬Pos(G;1&....&G;q)

Vi har i lys av (2) og derfinisjonen av "Ker;a" at T :– Nec(H;1&...&H;p). Videre har man i lys av (1) at T :– ¬Pos(¬D;i) (i=1,...,n). Dette og (6) impliserer:

(7) T :– ¬Pos(G;1&....&G;q). Nå har man i lys av forutsetningene, siden G er tillatt med hensyn på T at T :– Pos(G). Det følger at T :– Pos(G&.....&G). Ved å anvende identitetsaksiomene får vi så på grunn av (3) at

(8) T :– Pos(G;1& .... & G;q) siden G;j = G;(c;1,....,c;r)[c';1,...,c';r] der c';1,...,c';r er konstantene som forekommer i G og der T :– c;j=c';j for j=1,...,r. Men (8) og (7) er uforenlig med antagelsen om at T er konsistent. **Q.E.D.**

Vi innfører helt nye spesielle konstanter og utvider T' til en komplett Henkin-teori T*. Er T* dannet fra T på denne måten sier vi at T* er ¬Pos¬-underordnet T. Man ser at

k(CFm(L(T*))) Ω k(CFm(L(T))) = k(Ker;a(T) U[G/≈;T]

Vi sier, slik som tidligere, at en teori T' er underordnet T hvis og bare hvis det enten er slik at T' er Nec-underordnet eller ¬Pos¬-underordnet T.

Målet er nå å gi bevis for den følgende sats:

Teorem 10.2 La T være en konsistent S* (S*+)-teori i L. Da finnes det en S*(S*+)-modell for L som er en modell for T.

La da T' være en vilkårlig konsistent S*-teori. Vi kan da utvide den til en komplett Henkin-teori T. Vi skal da konstruere en S*-modell R som er en modell for T. En passe restriksjon av R vil så være en S*-modell for T'.

Vi begynner nå konstruksjonen av modellen. La T være en komplett Henkin-teori. La oss nå betegne mengden av alle de formler G der vi har at

(i) GêCFm(L(T))

(ii) k({G}) Inkl k(Ker;a(T)) og

(iii) T :– ¬Nec(¬G)

med Z1. Z1 vil være en i høyden tellbart uendelig mengde med formler. La oss tenke oss at vi har enummerert denne og at formlene er G;0, G;1,...,G;n,.... osv. For hver av disse

formlene konstruerer vi nå en teori som er Nec-underordnet G;i, la oss kalle denne T(G;i), på den måten som ble beskrevet ovenfor. T(Gi) vil da være konstruert i to stadier: Vi danner først S-teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i Ker;a(T)U{G;i} og ingen andre, og der språket er språket til T med konstantmengden begrenset til k(Ker;a(T)U{G;i}). Vi utvider så denne teorien til en komplett Henkin-teori ved å legge til nye spesielle konstanter og spesielle aksiomer. På dette punkt er konstruksjonen ikke entydig bestemt. Men det er åpenbart mulig å velge helt nye konstanter ved utvidelsesprosessen som ikke forekommer i noen av teoriene man så langt har konstruert. La oss kalle den resulterende teori for T(G;i). Vi har dermed konstruert en sekvens av teorier T(G;0), T(G;1), T(G;2),..... som alle er Nec-underordnet T.

Vi betrakter så mengden av alle de formler H der vi har:

(i) HêCFm(L(T;∂)) og

(ii) T;∂ :– Pos(H).

La oss kalle denne formelmengden for Z2. Også Z2 vil være en i høyden tellbart undelig mengde med formler. La oss tenke oss at vi har ennummerert denne mengden, og at formlene i den er H;0, H;1,...., H;n,..... osv. For hver formel H;i konstruerer vi nå en teori T*(H;i) som er ¬Pos¬-underordnet T;∂ på den måten som ble beskrevet i forrige paragraf. Teorien T*(H;i) (i=1,2,.....) er konstruert ved at vi først danner teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i C;(H;i,T)[1] og lar språket til denne teorien være L(T) med konstantmengden begrenset til
k(Ker;a(T)U{H;i). Denne teorien utvides så til en komplett Henkin-teori ved at vi legger til nye spesielle konstanter og aksiomer, og utvider den til en komplett teori ved hjelp av Lindenbaums metode. Vi har dermed konstruert en sekvens av teorier T*(H;0), T*(H;1), T*(H;2),..... som alle er ¬Pos¬-underordnet T.

Vi skal kalle alle teoriene T(G;0), T(G;1),.... T*(H;0), T*(H;1),.... osv. som er konstruert på måten ovenfor for teoriene på nivå 1. T, som vi starter med, er den eneste teorien på nivå 0. Man ser at alle teoriene på nivå 1 er underordnet T. La oss nå tenke oss at vi har definert alle teoriene på nivå n der n≥1. La oss betegne denne mengden av teorier med Nivå;n. Vi konstruerer så klassen av alle teorier på nivå (n+1) på følgende måte. La T;j være en teori som er med i Nivå;n. Vi konstruerer da en sekvens av underordnede teorier til T;j, la oss kalle dem, T;<j,0>, T;<j,1>, T<j,2>,..... på nøyaktig samme måte som vi konstruerte teorimengden T(G;0), T(G;1),.... T*(H;0), T*(H;1),.... med utgangspunkt i T. Ved konstruksjonen av de underordnete teorier må man imidlertid sørge for at de nye konstanter man trenger ved konstruksjonen av en teori ikke er brukt ved konstruksjonen av noen tidligere teori på samme nivå eller lavere nivå. Er T en teori på nivå n betegner vi klassen av alle de teoriene vi konstruerer på denne måten og som er underordnet T med "u(T)". Vi definerer så nivå n+1 ved:

Nivå;(n+1)= UN/TêNivå;n/(u(T))

Det bør bemerkes at det ikke er noe i veien for at det kan finnes en teori på et eller annet nivå som ikke har noen underordnete teorier.

Vi kan nå definere en modell R for T. Vi definerer først en del av modellstrukturen i modellen, <G,K>. Vi setter G=T. Videre lar vi K være definert ved:

K= UN/nêN/Nivå(n)

Vi la U være relasjonen 'underordnet' mellom elementene i K. Man ser at strukturen <G,K,U> er en trestruktur. Man kan forutsette at ingen av de spesielle konstantene som er brukt ved konstruksjonen av en eller annen teori i dette treet er brukt ved konstruksjonen av noen annen teori i treet.

Anta nå at H er en S*-teori og at L(H) er språket til H. Med den kanoniske ekvivalensrelasjonen over H, i symboler "≈;H" forstår vi ekvivalensrelasjonen definert slik:

[1] Merk at "C(F,T)" nå er definert som i §9

≈;H = Mg(<c;1,c;2>: c;1,c;2êConst(L(H)) & H :– (c;1=c;2)). Vi betegner kvotienmengden til Const(L(H)) med hensyn på ≈;H med "E;H" og setter per definisjon:

E;H = [Const(L(H)) / ≈;H]

Vi definerer nå den kanoniske modellstrukturen <G,K,¶,*f*,D,*> på følgende måte: Vi lar G og K være som ovenfor. Vi lar * være en bestemt formel i L(T). Alt ettersom teoriene vi betrakter er QK*, QKD*, QK4*, QKD4*, QT*eller QS4*-teorier lar vi ¶ være den minste relasjonen, den minste serielle relasjonen, den minste transitive relasjonen, den minste serielle og transitive relasjonen, den minste refleksive relasjonen, eller den minste refleksive og transitive relasjonen som inneholder U. I det følgende begrenser vi oss kun til å betrakte det tilfelle der vi har med QK*-teorier å gjøre. De andre tilfellene overlates til leseren som øvelse. Vi setter derfor R=U. Det gjenstår nå å definere *f* og D i den kanoniske modellstrukturen.

Anta xêE;H for en eller annen HêK. La H' være underordnet H. Vi skal definere H'(x). Anta yêE;H' og at ø≠ xΩy Inkl k(Ker;a(H)) i det vi antar at H' er Nec-underordnet H. Vi setter da H'(x)=y. Finnes det ikke noen slik y lar vi H'(x) være udefinert. Anta H' er ¬Pos¬-underordnet H. Finnes det da y êE;H' slik at

ø≠xΩy Inkl k(Ker;a(H)U [G/≈;H] lar vi H'(x)=y. I motsatt fall lar vi H'(x) være udefinert. Vi viser at H'(x) er veldefinert når den er definert.

Tilfelle (i): H' er Nec-underordnet H. Anta y;1,y;2êE;H' og at (0) y;1≠y;2. Anta videre at:

(1) ø≠ xΩy;1 Inkl k(Ker;a(H))

(2) ø≠ xΩy;2 Inkl k(Ker;a(H))

Fra (1) og (2) følger at det finnes c;1,c;2 der c;1ê(xΩy;1) og c;2ê(xΩy;2). Da har man c;1êy;1 og c;2êy;2. Siden y;1,y;2êE;H' og y;1≠y;2 følger det at y;1 og y;2 er disjunkte. Man har derfor at (3) H' :– (c;1≠c;2) siden H' er en komplett teori. Fra (1) og (2) følger at c;1,c;2êk(Ker;a(H)). Det må derfor finnes en formel F i L(H) som inneholder c;1 og c;2 og der vi har H :– Nec(F). Nå har man:

H :– Nec(F) –> (c;1 = c;2 –> Nec(c;1=c;2))

Siden c;1,c;2êx êE;H har vi H :– (c;1 =c;2). Det følger da at H :– Nec(c;1=c;2). Men da må man ha (c;1=c;2)êKer;a(H) Inkl H' og derfor at H' :– (c;1=c;2). Men dette strider mot (3) siden H' er en komplett teori og derfor konsistent. I dette tilfellet må man altså ha at y;1=y;2.

Tilfelle (ii): H' er ¬Pos¬-underordnet H. Anta y;1,y;2êE;H' og anta for reduktio ad absurdum at (0) y;1≠y;2. Anta videre at:

(1) ø≠ xΩy;1 Inkl k(Ker;a(H) U[G/≈;H])

(2) ø≠ xΩy;2 Inkl k(Ker;a(H) U[G/≈;H])

i det H' er ¬Pos¬-underordnet H med hensyn på G. Som i forrige tilfelle følger eksistensen av c;1 og c;2 der vi har c;1,c;2êk(Ker;a(H) U[G/≈;H]) og der vi har:

(3) c;1êy;1 & c;2êy;2 og

(4) H' :– (c;1 ≠ c;2)

Vi har imidlertid at c;1,c,2êx og derfor at H :– (c;1=c;2) I lys av R5 følger da H :– ¬Pos(¬(c;1=c;2)). Etter måten H' er konstruert har ma da H' :– (c;1=c;2). Dette strider mot (4) siden H' er konsistent. Dette avslutter beviset for at H'(x) er veldefinert.

Vi forbereder nå definisjonen av komponenten D i modellstrukturen. La HêK. For hver xêE;H defineres en funksjon f;x med K som domene. Vi ser på subtreet av <G,K,U> der H er topp-punkt. Er H'êK ikke noe punkt i dette treet setter vi at f;x(H') = # der # er en bestemt, på forhånd fiksert, formel i L. (Vi velger en annen formel en den som spiller rollen som *). Anta H' er et punkt i dette treet. Er H' =H setter vi f;x(H') = x ellers finnes H;1,.....H;n (n≥0) slik at <H,H;1>êU & <H;1,H;2>êU &....& <H;n,H'>êU. Har man da at H(H;n(H;(n-1)(.....(H;2(H;1(x))....))) er definert lar vi f;x være dette objektet ellers lar vi f;x være #. Dermed er f;x definert for alle H'êK om xêE;H der HêK.

Vi kan nå definere D. La c være en vilkårlig konstant i mengden UN/HêK/(Const(L(H))). La H være den øverste teorien i treet <G,K,U> der e forekommer. En slik unik, øverste teori finnes i lys av den måten treet <G,K,U> er konstruert på. Da setter vi g(c) = f;([c];H)) der f;([c];H)) er definert som ovenfor. Vi setter så:

D = Mg(g(c): c êUN/HêK/(Const(L(H))))

Vi definerer så f ved:

f(H) = Mg(f: fêD & f(H)ê E;H)

Dermed er modellstrukturen M= <G,K,¶,f,D,*> definert. For å definere resten av modellen må vi definere en intepretasjon I assosiert med L og M. Dette gjøres slik:

(i) Er P et n-ært predikat i L setter vi:
I(P,H) = Mg(<[e;1];H,....,[e;n];H> : H :– P(e;1,...,e;n))

(ii) Er f et n-ært funksjonsymbol i L setter vi:
I(f,H) = Mg(<[e;1];H,....,[e;n];H, [e;(n+1)];H> : H :– f(e;1,...,e;n)= e;(n+1))

(iii) Er s en singulær term i snever forstand i L setter vi:
I(s,H) = (iy)[(H :– (Ex)(x=s) & (Ec)(H :– s=c & y = [c];H)) v
(¬(H :– (Ex)(x=s)) & y = *)]

(iv) Tilslutt setter vi om cêUN/HêK/(Const(L(H))):
I(c,H') = g(c) for alle H'êK

Dermed er modellen R= <M,I,∏> fullstendig definert siden valuasjonsfunk-sjonen ∏ er bestemt straks de to andre komponentene er det.

Lemma 10.3 Anta H' er underordnet H og at xêE;H. Er H'(x) definert har man at x Inkl H'(x).

Bevis: Tilfelle (i). H' er Nec-underordnet H. Da er H'(x)=y der ø≠xΩy Inkl k(Ker;a(H)) og yêE;H'. Det finnes da c;1êxΩy, Det følger at c;1êx og c;1êk(Ker;a(H)). Anta cêx for vilkårlig konstant c. Siden xêE;H og c;1êx har man at H :– c =c;1. Men siden c;1êk(Ker;a(H)) må det finnes en GêKer;a(H) som inneholder c;1. Da H :– Nec(G). Men H :– Nec(G) –> (c=c;1 –> Nec(c;1=c)). Det følger at H :– Nec(c = c;1) og derfor at (c=c;1)êKer;a(H) Inkl H'. Da H' :– c;1 =c og derfor cêy = [c;1];H' = H'(x).

Tilfelle (ii): H' er ¬Pos¬-underordnet H. Vi har da at H'(x)= y êE;H' og at ø≠xΩy Inkl k(Ker;a(H) U [G/≈;H]) for en eller annen GêCFm(L(H)). Det følger at det må finnes c;1 der c;1êxΩy. Anta for vilkårlig konstant c at cêx. Siden xêE;H og c;1êx følger da at (1) H :– c;1=c. Det følger ved hjelp av R5 at
(2) H :– ¬Pos(¬(c;1=c)). Vi har at c;1êk(Ker;a(H)U [G/≈;H]). Er c;1êKer;a(H) kan man argumentere som i det forrige tilfelle og får at (c;1=c) êKer;a(H) og derfor at cêk(Ker;a(H)). I lys av (2) har man da at (c;1=c)êC;(G,H) og derfor at
H' :– c;1=c. Siden yêE;H' og c;1êy følger da ay cêy=H'(x). Men c var en vilkårlig konstant i x. Det følger at x Inkl H'(x). **Q.E.D.**

Lemma 10.4 Anta HêK og c'êUN/HêK/(Const(L(H))). Anta videre at cêConst(L(H)) og at g(c')(H) = [c];H. Da har man at c'ê[c];H.

Bevis: La H' være teorien øverst i treet <G,K,U> som inneholder c'. H' kan ikke være underordnet H for da er g(c') = # ≠ [c];H. Derfor må det finnes H;1,...,H;n slik at <H',H;1>êU & <H;1,H;2>êU & .... & <H;n,H>êU. (n≥0) Nå må H(H;n(H;(n–1(..... H;1([c'];H')...))) være definert for ellers er g(c') =# ≠ [c];H. Det følger da ved hjelp av Lemma 10.3 at:

[c';H' Inkl H;1([c';H) Inkl .... Inkl H(H;n(H;(n–1(..... H;1([c';H')...))) = g(c')(H). Men etter forutsetningen er g(c')(H) = [c];H. Det følger at [c';H' Inkl [c];H og derfor at c'ê[c];H. **Q.E.D.**

Lemma 10.5 Er cêConst(L(H)) der HêK gjelder g(c)(H) = [c];H.

Bevis: La H' være den øverste teorien i treet <G,K,U> der c forekommer. Da må man enten ha at H=H' og i dette tilfellet er det klart at satsen holder, eller så må H' ligge over H i treet. Vi gar at g(c) er definert som f;([e];H') der [e];H'êE;H'. Det må finnes H;1,....,H;n slik at <H',H;1>êU & <H;1,H;2>êU& .....& <H;n,H>êU.
Nå er g(c)(H') = [c];H' og cê[c];H. Siden c forekommer i H må se forekomme i H;1,....,H;n. Vi har derfor at cêg(c)(H;n) for n≥1 og følgelig cêg(c)(H) = [c';H for en eller annen c'êConst(L(H)) i lys av Lemma 10.3. Da [c];H = [c';H = g(e)(H). **Q.E.D.**

Lemma 10.6 Den definerte modellstrukturen oppfyller ikke-forgreningskravet.
Har man f1,f2ê*f*(H) & HRH' & f1ê*f*(H') og f1(H)=f2(H) så gjelder:
f2ê*f*(H') & f1(H')=f2(H').

Vi kan faktisk vise at noe sterkere holder:
(A) Er f1,f2ê*f*(H) & HR*H' & f1ê*f*(H') og f1(H)=f2(H) så gjelder:
f2ê*f*(H') & f1(H')=f2(H')

Bevis: Vi beviser at (A) holder. Anta f1,f2ê*f*(H). Da har man at f1= g(c;1) for en eller annen konstant c;1êUN/HêK/(Const(L(H)) og f2 = g(c;2) for en eller annen konstant c;2êUN/HêK/(Const(L(H)). Det følger at:
(1) g(c;1)(H) ê E;H & g(c;2)(H)êE;H
Se i denne forbindelse definisjonen av *f*. Fra (1) følger:
(2) g(c;1)(H) = [c';1];H for noe c';1êConst(L(H))
(3) g(c;2)(H) = [c';2];H for noe c';2êConst(L(H))
Fra forutsetningene i (A) følger fra (2) og (3) siden f1= g(c;1) og f2 = g(c;2) :
(4) H :– c';1 = c';2
Ved hjelp av Lemma 10.4, (2), (3) og (4) følger:
(5) H :– c;1 = c';1 = c';2 = c;2
Fra den andre forutsetningen i (A) følger eksistensen av H;1,...,H;(n-1) slik at
<H,H;1>êU & <H;1,H;2>êU & ..... & <H;(n-1),H'>êU.
I lys av forutsetningene i (A) har man g(c;1)(H')êE;H'. I følge Lemma 10.4 og Lemma 10.5 må man derfor ha:
(6) g(c;1)(H') = [c;1];H'
Set følger at c;1 må forekomme i H;1,...,H;(n-') og H. Da har man ved hjelp av Lemma 10.3:
(7) g(c;1)(H) Inkl g(c;1)(H;2) Inkl ..... Inkl.g (c;1)(h;(n-1)) Inkl g(c;1)(H').
Nå har man ved hjelp av (5) at c;2ê[c';1];H Inkl g(c;1)(H) (Jmf. (2)), og derfor i lys av (6) og (7) at c;2êg(c;1)(H') = [c;1];H'. Da må man ha [c;2];H' = [c;1];H'. Men g(c;2)(H') = [c;2];H' i lys av Lemma 10.5. Derfor g(c;1)(H') = g(c;2)(H'). Det følger også at g(c;2)ê*f*(H') siden g(c;2)(H') = [c;2];H' = [c;1];H' ê E;H'. Vi har derfor at f2ê*f*(H') & f1(H')=f2(H').
Q.E.D.

Lemma 10.7 (a) Anta iêπ(H) der HêK. Da finnes det en konstant cêConst(L(H)) slik at ∏(c,H) = ∏(i,H). (b) La cêConst(L(H)) der HêK. Da finnes det et navn iêπ(H) slik at ∏(c,H) = ∏(i,H).

Bevis: Vi gir først bevis for (b): Anta cêConst(L(H)). Da har man g(c)(H) = [c];H êE;H i følge Lemma 10.5 og derfor g(c)êf(H) i lys av definisjonen av f. La i være navnet på g(c). Da er iêπ(H) og ∏(c,H) = g(c) = ∏(i,H). Vi ser så på punkt (a): Anta iêπ(H). Da er i et navn på en eller annen zêf(H). Det følger at z=g(c') for noe c'êUN/HêK/ (Const(L(H))) og at g(c')(H)êE;H. Da har man at g(c')(H) = [c];H for en eller annen konstant cêConst(L(H)). I følge Lemma 10.4 har man da c'ê[c];H og derfor at c'êConst(L(H)). Det følger at ∏(c',H) = g(c') = ∏(i,H). **Q.E.D.**

Vi skal nå bevise:

Lemma 10.8 (Hovedlemma) La FêCFm(L(H)) der HêK. Da gjelder:

(1) H :– F <–> ∏(F,H)=1

(2) H :– (¬F) <–> ∏(F,H)=0

La t være en konstant i L(H) og cêConst(L(H)). Da gjelder:

(3) H :– (t=c) <–> ∏(t,H)(H) = [c];H

La t være en lukket term i L(H) som ikke er en konstant i L(H) og la cêConst(L(H)). Da gjelder:

(4) H :– (t=c) <–> ∏(t,H) = [c];H

Bevis: Beviset er ved induksjon på velformede uttrykk.

(i) Anta t = c;0 der c;0 er en konstant i L(H). Da har man at ∏(t,H)(H)= [c];H hvis og bare hvis:

(1) ∏(c;0,H)(H) = g(c;0)(H) = [c];H.

Men i lys av Lemma 10.5 er g(c;0)(H) =[c;0];H. (1) holder derfor hvis og bare hvis [c;0];H = [c];H Men [c;0];H = [c];H er tilfelle hvis og bare hvis H :– c;0=c. Siden t=c;0 er dette ekvivalent med H :– (t=c).

(ii) Anta t=s der s er en singulær term i snever forstand. Anta H :– (t=c). Da må man åpenbart ha:

(1) [c];H = (iy)[(H :– (Ex)(x=s) & (Ec)(H :– s=c & y = [c];H)) v
(¬(H :– (Ex)(x=s)) & y = *)]

Men fra dette og definisjonen av ∏ følger at ∏(t,H) = [c];H. Anta på den annen side at ∏(t,H) = [c];H. Da har man i lys av definisjonen av ∏ at (1) holder. Fra (1) følger (Ec') (H :– s=c' & [c];H = [c'];H). Herav H :– s = c som er det vi ønsker.

(iii) Anta t = f(t;1,....,t;n) og anta at H :– f(t;1,...,t;n)=c. Ved hjelp av aksiomene for funksjonssymboler og det at H er en Henkin-teori har man at det finnes konstanter c;1,...,c;n slik at H :– t;i=c;i (i=1,...,n). Ved hjelp av induksjons-hypotesen følger da:

(1) ∏(t;i,H) = [c;i];H om t;i er en singulær term i snever forstand, en beskrivelsesterm eller en term som begynner med et funksjonssymbol, og

(2) ∏(t;i,H)(H) = [c;i];H om t;i er en konstant I L(H).

Vi har enn mer at H :– f(c;1,...,c;n) = c og derfor i lys av definisjonen av ∏ at

(3) <[c;1];H,.....,[c;n];H, [c];H>ê ∏(f,H). Fra (1) – (3) følger at ∏(f(t;1,....,t;n), H) = [e];H. Anta på den annen side at ∏(f(t;1,....,t;n), H) = [c];H. I lys av Definisjon 9.3 og definisjonen av ∏ har man da at det finnes konstanter c;1,...,c;n i L(H) slik at ∏(t;i,H) = [c;i];H om t;i er en singulær term i snever forstand, en beskrivelsesterm eller en term som begynner med et funksjon-symbol, og ∏(t;i,H)(H) = [c;i];H om t;i er en konstant I L(H). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da (4) H :– (t;i = c;i) for i=1,...,n. Videre må man ha <[c;1];H,.....,[c;n];H, [c];H>ê ∏(f,H). I lys av definisjonen av "∏(f,H)" følger at

H:– f(c;1,...,c;n)=c. Dette, (4) og identitetsaksiomene for funksjonsymboler impliserer H :– f(t;1,...,t;n)=c.

(iv) Vi bemerker før vi går videre at alle hjelpesetningene i §2 holder forutsatt at visse modifikasjoner gjøres i Lemma 2.1 og Lemma 2.2. Klausulene om termer må i disse to hjelpesetningene forandres slik at man tar hensyn til at konstanter og navn nå har andre egenskaper enn termene av de andre slag vi har innført: singulære termer i snever forstand, beskrivelsestermer og termer som begynner med et funksjonssymbol. Vi overlater imidlertid detaljene når det gjelder reformuleringen av disse satsene og bevisene for dem til leseren.

Anta t = (ix)F er en lukket term i L(H). Anta ¬(∏((ix)F,H)= [c];H) der cêConst(L(H)). Da finnes jêπ(H) der vi enten har

(1) ¢;-1(j)(H) =[c];H & ∏(F;x[i],H)≠1 eller

(2) ¢;-1(j)(H) ≠ [c];H & ∏(F;x[i],H) = 1.

Anta (1) er tilfelle. Det må da ifølge Lemma 10.7 finnes en konstant c' i L(H) slik at

(3) ∏(j,H) = ∏(c',H) = g(c')

Siden j er et navn på g(c') har man ved hjelp av (1) og Lemma 10.5 at

g(c')(H) = [c'];H = [c];H

Det følger herav at (4) H :– c' = c. Fra (1) og (3) følger i lys av lemma 2.3 at ∏(F;x[c'],H)≠1. I lys av induksjonshypotesen har man da ¬ (H :– F;x[c']). Da følger ved hjelp av (4) at ¬(H :– F;x[c]). Dette strider mot H :– (Ax)(F <–> x=c) og derfor mot H :– (ix)F = c.

Anta nå at (2) er tilfelle. Siden j er navn i π(H) har man ved hjelp av Lemma 2.7 at det må finnes en konstant c'êConst(L(H)) slik at ∏(i,H) = ∏(c',I) = g(c'). Da har man ¢;-1(j)(H) = g(c')(H) = [c'];H. Det følger da ved hjelp av (2) at [c'];H ≠ [c];H. Dette innebærer siden H er en komplett teori at (5) H :– (c'≠c). På den annen side har vi i lys av (2), siden i er et navn på g(c'), at ∏(F;x[c'], H)=1. Fra dette og induksjonshypotesen følger (6) H :– F;x[c']. Men (5) og (6) strider mot H :– (Ax)(F <–> x=c) og derfor i lys av beskrivelsesaksiomene mot det at

H :– (ix)F = c.

Anta på den annen side at ∏((ix)F,H) = [c];H. Da har vi for ethvert navn iêπ(H) at:

(7) ¢;-1(j)(H) = [c];H <–> ∏(F;x[j],H)=1.

La c' være en vilkårlig konstant i L(H). Ved hjelp av Lemma 10.7 finnes det da et navn iêπ(H) slik at:

(8) ∏(c',H) = g(c') = ∏(i,H). Fra (7) følger da:

(9) ¢;-1(i)(H) = [c];H <–> ∏(F;x[i],H)=1. Fra dette, (8), Lemma 2.3 og Lemma 10.5 har man:

(10) g(c')(H) = [c'];H = [c];H <–> ∏(F;x[c'],H) = 1

(10) impliserer ved hjelp av induksjonshypotesen:

(11) H :– (c'=c) <–> H :– F;x[c']. Siden H er en komplett teori kan man slutte fra dette: (12) H :– (c'= c <–> F;x[c']). Men c' var en vilkårlig konstant i L(H). Siden (12) derfor holder for alle c'êConst(L(H)) og H er en Henkin-teori følger H :– (Ax)(F <–> x=c). Fra dette kan man utlede H :– (ix)F=c ved hjelp av beskrivelsesaksiomene.

(v) Anta F = P(t;1,....,t;n) og anta at H :– P(t;1,...,t;n). Ved hjelp av aksiomene for predikatsymboler og det at H er en Henkin-teori har man at det finnes konstanter c;1,...,c;n slik at H :– t;i=c;i (i=1,...,n). Ved hjelp av induksjons-hypotesen følger da:

(1) ∏(t;i,H) = [c;i];H om t;i er en singulær term i snever forstand, en beskrivelsesterm eller en term som begynner med et funksjonssymbol, og

(2) ∏(t;i,H)(H) = [c;i];H om t;i er en konstant I L(H).

Vi har enn mer at H :– P(c;1,...,c;n) og derfor i lys av definisjonen av ∏ at

(3) <[c;1];H,.....,[c;n];H>ê ∏(P,H). Fra (1) – (3) følger at ∏(P(t;1,....,t;n), H) = 1. Anta på den annen side at ∏(P(t;1,....,t;n), H) = 1. I lys av Definisjon 9.3 og definisjonen av ∏ har man da at det finnes konstanter c;1,...,c;n i L(H) slik at ∏(t;i,H) = [c;i];H om t;i er en singulær term i snever forstand, en beskrivelsesterm eller en term som begynner med et funksjon-symbol, og ∏(t;i,H)(H) = [c;i];H om t;i er en konstant I L(H). Ved hjelp av induksjons-hypotesen følger da (4) H :– (t;i = c;i) for i=1,...,n. Videre må man ha <[c;1];H,.....,[c;n];H>ê ∏(P,H). I lys av definisjonen av "∏(P,H)" følger at H:– P(c;1,...,c;n). Dette, (4) og aksiomene for fpredikatsymboler impliserer H :– P(t;1,...,t;n).

(vi) Induksjonstrinnene når F = (¬G), F= (G;1–> G;2) og F = (Ax)G byr ikke på noen spesielle problemer og beviset føres i det vesentlige på samme måte som i beviset for Lemma 6.1. Induksjonstrinnene for F= Nec(G) og F= Pos(G) går også nesten nøyaktig som i beviset for Lemma 6.1. Den eneste forskjell er at på de punkter hvor vi betraktet k(Ker;a(H)U{G}) må man å i stedet arbeide med k(Ker;a(H) U [G/≈;H]).

Dermed har vi fullført beviset for Lemma 10.8. **Q.E.D.**

Vi avslutter med å vise hvordan Teorem 10.2 kan utledes. La T være en konsisten S*(S*+)-teori i L. Den kan da utvides til en komplett Henkin-teori T' i et språk L'. Vi konstruerer så en modell R slik som beskrevet ovenfor der vi lar G(R) = T'. Ved hjelp av Lemma 10.8 kan vi konkludere med at dersom FêCFm(L(T')) så har man T' :– F <–> ∏(F,G(R))=1. Siden en formel er gyldig i R hvis og bare hvis den universelle lukningen av den er det, følger det at R er en modell for T'. La R' være begrensningen av R til L(T'). Da ser man lett at R' er en modell for T'. L(T') er L(T) utvidet med nye konstanter, spesielle konstanter. La R" være restriksjonen av R' til L(T). Det er da lett å verifisere at R" er en modell for T.

Vi har ovenfor tenkt oss at vi konstruerte den kanoniske modellen R med utgangspunkt i en S*-teori T. Tenker vi oss at vi isedenfor konstruerer den med utgangspunkt i en S*+ -teori er det forholdsvis greit å påvise at den definerte modellen oppfyller kravet (E+). Den detaljerte verifikasjon av dette overlates til leseren. Dette innebærer at vi kan sies å ha godtgjort fullstendigheten til alle de systemene som er tatt med i venstre halvdel av Figur 2 i §9.

§11 Systemer med kontingent identitet.

Vi lar systemet S:k være definert som systemet S*, men aksiomskjemaet A7 (som er nevnt i §3) er nå utelatt.[2] Systemet S;k+ er systemet S;k utvidet med aksiomet: (E) (Ax)Nec((Ey)(y=x)).

Med en S;k-modell forstår vi det samme som en S*-modell, men vi krever ikke lenger at modellen oppfyller ikke-forgreningskravet (+) i §9. Med en S;k+ -modell forstås en S*+-modell der det på samme måte ikke kreves at ikke-forgreningskravet skal være oppfylt.

Når det gjelder systemene av typen S;k og S;k+ gjelder det følgende gyldighetsteorem:

Teorem 11.1 (a) La T = ß(Δ, S;k,L) være en S;k-teori i L. La R være en S;k-modell for L der alle formlene i Δ er gyldige. Da gjelder at enhver formel i T er gyldig i R. (b) La T = ß(Δ, S;k+,L) være en S;k+ -teori i L. La R være en S;k+ -modell for L der alle formlene i Δ er gyldige. Da gjelder at enhver formel i T er gyldig i R.

Man beviser dette teoremet lett ved induksjon på teoremer. Detaljene overlates til leseren.

[2] "S" er plassholder for enten "QK", "QKD", "QK4", "QKD4", "QT" eller "QS4".

§12 Fullstendighetsbevis for systemene med kontingent identitet.

Vi vender oss nå til beviset for kompletthet når det gjelder systemene av typen S;k og S;k+. Som før (Se §4, Teorem 4.1 – 4.5) kan vi vise at enhver konsistent S;k(S;k+)-teori kan utvides til en komplett Henkin S;k(S;k+)-teori. Dette er mulig fordi identitetsaksiomet A7 ikke spiller noen vesentlig rolle i bevisene for Teorem 4.1 – 4.5 i §4. La oss også gjøre oppmerksom på at når vi heretter taler om teorier mener vi S;k eller S;k+ -teorier om intet annet sies.

La T være en komplett Henkin-teori. La G være en lukket formel i L(T). G sies da å være mulig med hensyn på T hvis og bare hvis k({G}) Inkl k(Ker;a(T)) og T :– ¬Nec(¬G). Vi sier at G er tillatt med hensyn på T hvis og bare hvis
T :– Pos(G)

La T være en komplett Henkin-teori. Anta G er mulig med hensyn på T. La T' være teorien som har som ikke-logiske aksiomer Ker;a(T)U{G} og hvor språket er L(T), men med konstantmengden begrenset til k(Ker;a(T)). Som før beviser vi at T' er konsistent. La T* være en komplett Henkin-utvidelse av T' der vi har brukt helt nye spesielle konstanter ved utvidelsen. Vi sier da at T' er Nec-underordnet T (med hensyn på G).

La T være en komplett Henkin-teori. Anta G er tillatt med hensyn på T. La C;(G,T) være mengden:

Ker;b(T)Ω Mg(F: k({F}) Inkl k(Ker;a(T) U {G}) & FêCFm(L(T)) U
{G} U Ker;a(T).

La T' være teorien der de ikke-logiske aksiomene er C;(G,T) og der språket er L(T) med konstantmengden begrenset til k(C;(G,T)). På samme måte som tidligere, se i denne forbindelse Lemma 6.1 og Lemma 10.1, kan man vise at T' er konsistent. La T* være en komplett Henkin-utvidelse av T' der helt nye spesielle konstanter er brukt ved Henkin-utvidelsen. Er T* konstruert med utgangspunkt i T på denne måten sier vi at T* er ¬Pos¬-underordnet T (med hensyn på G).

Som tidligere sier vi at T' er underordnet T hvis og bare hvis T' enten er Nec-underordnet eller ¬Pos¬-underordnet T (med hensyn på en eller annen formel G)

Vi skal nå konstruere en modellstruktur <G,K,¶,*f*,D,*>. Dette skjer hovedsakelig som i §10. Først konstrueres en tre-struktur <G,T,U> slik:

La T være en komplett Henkin-teori. La oss nå betegne mengden av alle de formler G der vi har at

(i) GêCFm(L(T))
(ii) k({G}) Inkl k(Ker;a(T)) og
(iii) T :– ¬Nec(¬G)

med Z1. Z1 vil være en i høyden tellbart uendelig mengde med formler. La oss tenke oss at vi har enummerert denne og at formlene er G;0, G;1,...,G;n,.... osv. For hver av disse formlene konstruerer vi nå en teori som er Nec-underordnet G;i, la oss kalle denne T(G;i), på den måten som ble beskrevet ovenfor. T(Gi) vil da være konstruert i to stadier: Vi danner først teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i Ker;a(T)U{G;i} og ingen andre, og der språket er språket til T med konstantmengden begrenset til k(Ker;a(T)U{G;i}). Vi utvider så denne teorien til en komplett Henkin-teori ved å legge til nye spesielle konstanter og spesielle aksiomer. På dette punkt er konstruksjonen ikke entydig bestemt. Men det er åpenbart mulig å velge helt nye konstanter ved utvidelsesprosessen som ikke forekommer i noen av teoriene man så langt har konstruert. La oss kalle den resulterende teori for T(G;i). Vi har dermed konstruert en sekvens av teorier T(G;0), T(G;1), T(G;2),..... som alle er Nec-underordnet T.

Vi betrakter så mengden av alle de formler H der vi har:

(i) HêCFm(L(T;∂)) og
(ii) T;∂ :– Pos(H).

La oss kalle denne formelmengden for Z2. Også Z2 vil være en i høyden tellbart undelig mengde med formler. La oss tenke oss at vi har ennummerert denne mengden, og at formlene i den er H;0, H;1,...., H;n,..... osv. For hver formel H;i konstruerer vi nå en teori T*(H;i) som er ¬Pos¬-underordnet T;∂ på den måten som ble beskrevet ovenfor. Teorien T*(H;i) (i=1,2,.....) er konstruert ved at vi først danner teorien hvis ikke-logiske aksiomer er formlene i C;(H;i,T) og lar språket til denne teorien være L(T) med konstantmengden begrenset til k(C;(H;i,T)). Denne teorien utvides så til en komplett Henkin-teori ved at vi legger til nye spesielle konstanter og aksiomer, og utvider den til en komplett teori ved hjelp av Lindenbaums metode. Vi har dermed konstruert en sekvens av teorier T*(H;0), T*(H;1), T*(H;2),..... som alle er ¬Pos¬-underordnet T.

Vi skal kalle alle teoriene T(G;0), T(G;1),.... T*(H;0), T*(H;1),.... osv. som er konstruert på måten ovenfor for teoriene på nivå 1. T, som vi starter med, er den eneste teorien på nivå 0. Man ser at alle teoriene på nivå 1 er underordnet T. La oss nå tenke oss at vi har definert alle teoriene på nivå n der n≥1. La oss betegne denne mengden av teorier med Nivå;n. Vi konstruerer så klassen av alle teorier på nivå (n+1) på følgende måte. La T;j være en teori som er med i Nivå;n. Vi konstruerer da en sekvens av underordnede teorier til T;j, la oss kalle dem, T;<j,0>, T;<j,1>, T<j,2>,..... på nøyaktig samme måte som vi konstruerte teorimengden T(G;0), T(G;1),.... T*(H;0), T*(H;1),.... med utgangspunkt i T. Ved konstruksjonen av de underordnete teorier må man imidlertid sørge for at de nye konstanter man trenger ved konstruksjonen av en teori ikke er brukt ved konstruksjonen av noen tidligere teori på samme nivå eller lavere nivå. Er T en teori på nivå n betegner vi klassen av alle de teoriene vi konstruerer på denne måten og som er underordnet T med "u(T)". Vi definerer så nivå n+1 ved:

Nivå;(n+1)= UN/TêNivå;n/(u(T))

Det bør bemerkes at det ikke er noe i veien for at det kan finnes en teori på et eller annet nivå som ikke har noen underordnete teorier.

Vi kan nå definere en modell R for T. Vi definerer først en del av modellstrukturen i modellen, <G,K>. Vi setter G=T. Videre lar vi K være definert ved:

K= UN/nêN/Nivå(n)

Vi la U være relasjonen 'underordnet' mellom elementene i K. Man ser at strukturen <G,K,U> er en trestruktur. Man kan forutsette at ingen av de spesielle konstantene som er brukt ved konstruksjonen av en eller annen teori i dette treet er brukt ved konstruksjonen av noen annen teori i treet.

La cêUN/HêK/(Const(L(H)). La H' være den øverste teorien i treet <G,K,U> der konstanten c forekommer. Det må finnes en og bare en slik teori. Definer en funksjon g(c) assosiert med c på følgende måte: Er H utenfor subtreet med H' som topp-punkt er g(c)(H)=# der # er en formel i L(G) som vi en gang for alle har valgt ut. Anta H befinner seg i subtreet som har H' som topp-punkt. Da har vi <H',H>ê U/n/ (n≥0). Forekommer c i L(H) setter vi g(c)(H) = [e];H. Forekommer c ikke i L(H) setter vi g(c)(H)=#. Dermed er g(c) definert for alle HêK. Vi definerer så D ved å sette:

D = Mg(g(c): cêUN/HêK/(Const(L(H))))

Videre defineres funksjonen f ved:

f(H) = Mg(f: fêD & f(H)êE;H) der E;H = Mg([c];H : cêConst(L(H))).

Vi definerer nå den kanoniske modellstrukturen <G,K,¶,f,D,*> på følgende måte: Vi lar G, K,f,D og * være som ovenfor. Vi lar * være en bestemt formel i L(T). Alt ettersom teoriene vi betrakter er QK:k, QKD;k, QK4;k, QKD4;k, QT;k eller QS4;k-teorier lar vi ¶ være den minste relasjonen, den minste serielle relasjonen, den minste transitive relasjonen, den minste

serielle og transitive relasjonen, den minste refleksive relasjonen, eller den minste refleksive og transitive relasjonen som inneholder U. I det følgende begrenser vi oss kun til å betrakte det tilfelle der vi har med QK;k-teorier å gjøre. De andre tilfellene overlates til leseren som øvelse. Vi setter derfor R=U. Dermed er den kanoniske modellstrukturen <G,K,¶,*f*,D,*> fullstendig definert. Vi bemerker at Q(H) = E;H for alle HêK.

For å definere resten av modellen må vi definere en intepretasjon I assosiert med L og M. Dette gjøres slik:

(i) Er P et n-ært predikat i L setter vi:
I(P,H) = Mg(<[e;1];H,....,[e;n];H> : H :– P(e;1,...,e;n))

(ii) Er f et n-ært funksjonsymbol i L setter vi:
I(f,H) = Mg(<[e;1];H,....,[e;n];H, [e;(n+1)];H> : H :– f(e;1,...,e;n)= e;(n+1))

(iii) Er s en singulær term i snever forstand i L setter vi:
I(s,H) = (iy)[(H :– (Ex)(x=s) & (Ec)(H :– s=c & y = [c];H)) v
(¬(H :– (Ex)(x=s)) & y = *)]

(iv) Tilslutt setter vi om cêUN/HêK/(Const(L(H))):
I(c,H') = g(c) for alle H'êK

Dermed er modellen R= <M,I,∏> fullstendig definert siden valuasjonsfunk-sjonen ∏ er bestemt straks de to andre komponentene er det.

Vi bemerker at Lemma 10.4, Lemma 10.5 og Lemma 10.7 fremdeles holder, men med nye bevis, slik vi nå har definert modellen R.

Den følgende sats svarer til Lemma 10.8 i §10:

Lemma 12.1 (Hovedlemma) La FêCFm(L(H)) der HêK. Da gjelder:

(1) H :– F <–> ∏(F,H)=1

(2) H :– (¬F) <–> ∏(F,H)=0

La t være en konstant i L(H) og cêConst(L(H)). Da gjelder:

(3) H :– (t=c) <–> ∏(t,H)(H) = [c];H

La t være en lukket term i L(H) som ikke er en konstant i L(H) og la cêConst(L(H)). Da gjelder:

(4) H :– (t=c) <–> ∏(t,H) = [c];H

Bevis: Beviset er ordrett som for Lemma 10.8. **Q.E.D.**

Ved hjelp Lemma 12.1 kan man så bevise det følgende teorem på nøyaktig samme måte som Teorem 10.2 ble bevist ved hjelp av Lemma 10.8:

Teorem 12.2 La T være en konsistent S;k (S;k+)-teori i L. Da finnes det en S;k(S;k+)-modell for L som er en modell for T.

Inklusjonsforholdene mellom alle de systemene vi har studert er anskueliggjort i den følgende figur. Denne er en utvidelse av av Figur 1 og Figur 2.

Går den en strek fra et system S til et annet S' som ligger lavere indikerer dette at systemet S inluderer systemet S'. Fra figuren fremgår det derfor at QK;k er det svakeste av alle de systemene som vi har betraktet og at QS4+ er det sterkeste.

Konstruerer vi med utgangspunkt i en konsistent S;k+-teori T den kanoniske modellen R ovenfor ,vil aksiomet (Ax)Nec((Ey)(y=x)) være nærværende i alle teoriene i treet i modellen. Det er da lett å verifisere at den konstruerte modellen tilfredstiller kravet:

(E+) Er H,H'êK & <H,H'>êU/n/ for n≥0 gjelder at f(H) Inkl f(H')

Bevis: Dette bevises ved induksjon på n. Påstanden holder åpenbart om n=0. Anta den holder for n. Anta H,H'êK og <H,H'>êU/n+1/. Da finnes en H;0 slik at <H,H;0>êU/n/ og <H;0,H'>êU. I følge induksjonshypotesen har vi
f(H) Inkl f(H;0). Anta xêf(H;0). Da er x=g(c) for en eller annen konstant c der cêUN/HêK/ (Const(L(H))). Da har vi g(c)(H;0) = [c];(H;0) ê E;(H;0). Det følger i så fall at cêConst(L(H;0)). Siden H;0 :– (Ax)Nec((Ey)(y=x)) har vi at
H;0 :– Nec((Ey)(y=c)). Da har man (Ex)(x=c)êKer;a(H;0) og derfor har man at cêConst(L(H')) hva enten H' er Nec-underordnet eller ¬Pos¬-underordnet H;0. Følgelig g(c) (H') = [c];H'ê E;H'. Da er x=g(c)êf(H'). Vi har derfor vist at
f(H) Inkl f(H'). **Q.E.D.**

---•••---

Referanser

Referanser

Føllesdal [1]	Føllesdal, Dagfinn. "Referential Opacity and Modal Logic", *Filosofiske problemer nr. XXXII* (edited by Arne Næss) Oslo: Universitetsforlaget, 1966
Føllesdal [2]	Føllesdal, Dagfinn. "A model theoretic approach to causal logic", *Det kgl.norske videnskapers selskaps skrifter* 1966 nr. 2. Trondheim: I kommisjon hos F. Bruns Bokhandel.
Føllesdal [3]	Føllesdal, Dagfinn. "Knowledge, Identity and Existence", *Theoria* 33 (1967). 1–27.
Henkin [1]	Henkin, Leon. "The Completeness of the First Order Functional Calculus". *Journal of symbolic logic* 14 (1949), 159–66.
Hintikka [1]	Hintikka, Jaakko. *Models for Modalities* . Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1969.
Hintikka [2]	Hintikka, Jaakko. *Knowledge and Belief.* Ithaca: Cornell University Press, 1962.
Hintikka [3]	Hintikka, Jaakko. "Modality and Quantification". *Theoria* 27 (1961), 119–128.
Hintikka [4]	Hintikka, Jaakko. "The Modes of Modality". *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963), 65–82.
Hintikka [5]	Hintikka, Jaakko. ""Kowing that one knows" re-viewed". *Synthese* 21 (1970), 141–162.
Hintikka [6]	Hintikka, Jaakko. "Existence and Identity in epistemic contexts: A comment on Føllesdal's paper". *Theoria* 33 (1967), 138–148.
Hintikka [7]	Hintikka, Jaakko. *Quantifiers in Deontic Logic.* Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Humanarum, Litterarum XXXIII: 4. Helsinki: 1957
Hintikka [8]	Hintikka, Jaakko. "Individuals, Possible Worlds, and Epistemic Logic". *Noûs* 1 (1967), 33–62.
Kripke [1]	Kripke, Saul A. "A Completeness Theorem i Modal Logic". *Journal of symbolic logic* 24 (1959), 1–15.
Kripke [2]	Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi". *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), 67–96.
Kripke [3]	Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi". In *The Theory of Models* (Edited by Addison, Henkin and Tarski), pp 206–220. Amsterdam, 1965
Kripke [5]	Kripke, Saul A. "Semantical considerations on modal logic". *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963) 83–94
Scott [1]	"Advice on Modal Logic". In *Philosophical Problems in Logic Recent Developments* (edited by Karel Lambert), pp. 143 –173, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1974.
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic.* London: Addison-Wesley, 1967.

Tarski [1] Tarski, Alfred. "The Concept of Truth in Formalized Languages" in *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (translated by J.H. Woodger) Oxford: Clarendon Press, 1956.